Que concepções epistemológicas da demonstração? Para que aprendizagens?(II)*

Evelyne Barbin

" Se soubesse para que serve o teorema de Pitágoras, como o inventaram, eu poderia aprendê-lo, mas assim desconfio"[1]
Virginie, aluna do 10º ano (Naudin, 1990)

No ensino francês da Matemática, um lugar importante é dado à demonstração: muitos professores consideram que a demonstração constitui a entrada no mundo da matemática. No entanto, muitos alunos consideram que a demonstração marca o início do seu insucesso na disciplina.

Concepções epistemológicas subjacentes ao ensino da demonstração

Todo o ensino da Matemática assenta sobre concepções epistemológicas, isto é, sobre concepções do saber matemático, muitas vezes implícitas. Destas, quais são as que dizem respeito ao ensino da demonstração? Para estudar esta questão reportar-nos-emos a alguns exemplos de ensino, desde o ensino tradicional ao ensino por situações problema.

É inutil dar aqui grandes explicações sobre o que se entende por ensino tradicional, visto que é o ensino que a maior parte dos professores de hoje conheceu quando eram estudantes. No ensino tradicional não há propriamente aprendizagem da demonstração. Para mostrar aos alunos o que é uma demonstração, o professor escreve demonstrações no quadro. Mostra como apresentar à esquerda as hipóteses e à direita as conclusões. A demonstração consiste em ir de umas a outras, através de um raciocínio dedutivo, citando os teoremas utilizados ou especificando-os por um código — "segundo a proposição V sobre as paralelas..." —, e mostrando bem a que objectos são aplicados os teoremas — "os segmentos AB e CD são paralelos por hipótese, e se a recta EF os intersecta então..." Em seguida os alunos são convidados a demonstrar. Aqui as coisas complicam-se: como encontrar a demonstração? O professor dá uma solução, mas como é que ele a achou? O processo está escondido. Escondido, ao ponto de muitos alunos não compreenderem qual o sentido que pode ter este texto, de eles não imaginarem, um só instante, que para demonstrar é necessário pensar, experimentar, rasurar e enganar-se. "Pensar é ir de erro em erro. (...) O que faz com que a Matemática seja uma prova temível, é que ela não suaviza o erro" escreve Alain, como se ele também nunca tivesse suspeitado que fazer Matemática é pensar[2]. Assim muitos alunos retiram-se deste jogo do qual não compreendem o sentido mesmo quando lhes damos as regras. Eles escreverão à esquerda as hipóteses e à direita as conclusões o que lhes assegurará dois pontos no trabalho. Alguns mais obstinados escreverão um texto que parecerá uma demonstração... e que deixará o professor estupefacto.

No ensino tradicional a demonstração é claramente concebida como um produto. A racionalidade que pressupõe a produção de uma demonstração está já supostamente presente na cabeça dos alunos, visto que não se vê como ele a poderá adquirir por mimetismo olhando o professor a escrever as demonstrações (concepção idealista). Pode, esta demonstração, assegurar a veracidade das conclusões? Ela convence, sem dúvida, os alunos que compreendem que se trata de estabelecer verdades. A maior parte não será esclarecida nem interessada, visto que o seu insucesso lhes fez crer que de qualquer forma "a Matemática não é

* Segunda parte do artigo com o mesmo título cuja publicação foi iniciada no número 27 da revista. Ver outras notas no fim do artigo.

para eles".

Este quadro poderá parecer muito negro, mas, apesar de tudo, ainda há alunos que conseguem escrever demonstrações com o ensino tradicional. Muitos professores constactam a ineficácia deste ensino e perguntam-se, como os colegas da APMEP: "como aprendemos as demonstrações? Geralmente fazemos demonstrações perante os alunos, e pedimos-lhes seguidamente que as façam de forma semelhante. Cada um sabe as dificuldades encontradas"[3].

Desde há alguns anos, têm sido desenvolvidas investigações, em particular nos IREM, para suprir as deficiências do ensino tradicional e questionar sobre o que deveria ser a aprendizagem da demonstração. O progresso é claro no seu objectivo: trata-se de ensinar os alunos a demonstrar.

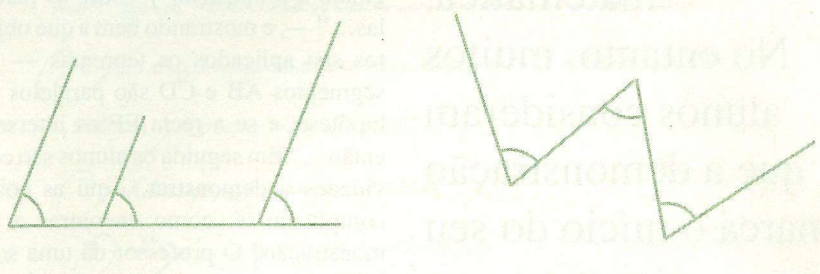
Os trabalhos de Dominique Gaud e de Jean-Paul Guichard inscrevem-se nesta perspectiva: eles escrevem que "se aprende a demonstrar" e que "o aluno aprende fazendo e não olhando como se faz". Estes colegas consideram que é necessário separar, na aprendizagem, dois momentos, o da investigação e o da redacção de uma demonstração, para responder ao que eles imaginam ser a dupla dificuldade da demonstração, a lógica e a redacção[4]. Eles atribuem grande importância aos métodos de demonstração privilegiando certas formas de raciocínio dedutivo. A explicitação dos métodos na aula, leva-os a fazer da demonstração um objecto de ensino. Como notam A. L. Mesquita e J.C. Rauscher, a metodologia visa sobretudo "os alunos que tinham já compreendido de que é que se trata numa demonstração"[5]. Dir-se-ia que ela constitui uma ajuda para os alunos que já compreenderam o sentido de uma demonstração e que têm um modo de conhecer os objectos geométricos capaz de um processo dedutivo. Apesar desta abordagem se concentrar no processo de demonstração ela não se apoia numa concepção construtivista, nem responde à questão do sentido da demonstração.

Opondo-se a estes seus colegas Nicolas Balacheff, investigador do IMAG de Grenoble, escreve: "é frequente, por exemplo, em situação escolar, considerar a redacção da solução de um problema fora da resolução, e isto não nos parece pertinente. Com efeito (...) redigir a solução de um problema conduz à sua análise e portanto a um eventual pôr em causa; a formulação está associada à administração da prova"[6]. Esta concepção, que toma em conta o sentido que os alunos podem ter da demonstração, é fundamental no método das narrações de investigação proposto pelo IREM de Montpellier.

A questão do sentido da demonstração é central nas investigações de Nicolas Balacheff[7]. Este investigador elaborou uma sequência didáctica para que os alunos do 8º ano "que ainda não estudaram a noção de demonstração, possam formular uma conjectura e considerar o problema de fornecer a prova"[8]. Esta sequência respeita ao teorema sobre a soma dos ângulos de um triângulo.

A sequência didáctica é composta de três actividades que resumiremos aqui. Na primeira actividade, cada aluno traça um triângulo, mede os ângulos e calcula a soma. O professor sistematiza os dados num histograma e pede comentários à turma. Na segunda actividade, o professor dá aos alunos o mesmo triângulo, cada aluno formula uma aposta, mede os ângulos, calcula a soma e comenta a diferença entre esta e a aposta. O professor elabora um histograma e pede comentários. Na terceira actividade, o professor entrega aos alunos uma cópia com os mesmos três ângulos — dois grandes, um pequeno, um baixo e um ponteagudo — cada aluno faz uma aposta, mede os ângulos, calcula a soma e finalmente o professor recolhe os dados e pede comentários. O professor deve manter-se afastado, a fim de que o problema seja devolvido à turma e que se instaure um debate sócio-cognitivo.

Esta sequência é elaborada com a hipótese de que "a desqualificação da medição como meio de conhecer esta soma, legitimará a exigência de provas intelectuais da conjectura pretendida". Ela ancorava-se pois, numa concepção realista, onde a demonstração vem substituir uma incerteza das medições. Não provém, a nosso ver, de uma concepção construtivista, na medida em que a situação proposta aos alunos não toma lugar numa problemática suficientemente rica para conduzir à construção da noção de ângulo. Ora o ângulo que é sempre o mesmo, seja qual for o comprimento dos seus lados, é uma noção difícil que os alunos do 8º ano dominam dificilmente. Deverão então despoletar-se "perturbações epistemológicas" no desenvolvimento da sequência. É efectivamente o caso da primeira turma, onde a sequência de aprendizagem é experimentada. Com efeito os alunos desenharam os triângulos demasiado pequenos e o professor sentiu-se na obrigação de intervir. "Se não vêm bem prolonguem os lados", "é sempre o mesmo ângulo, não é este comprimento aqui que tu vais medir Karelle, é a abertura do ângulo". Para evitar estas perturbações, o segundo professor que experimenta a sequência informa inicialmente os alunos de que é preciso traçar um triângulo "suficientemente grande porque ides medir os ângulos do triângulo, e é necessário que ele não seja demasiado pequeno". Neste momento a questão epistemológica do ângulo está curto-circuitada.



uma escada   uma serra

fig. 1

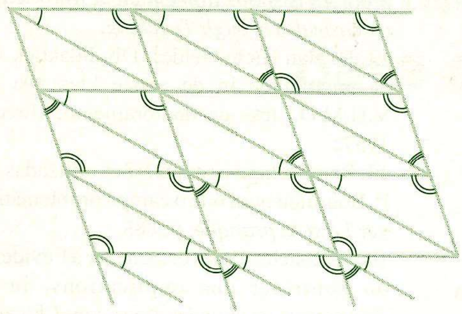


fig. 2

Nenhuma das duas turmas se empenhou num "processo de validação". Na primeira turma os alunos concordaram em dizer que a soma dos ângulos de um triangulo faz mais ou menos 180°. O que é exacto: por mais triângulos desenhados com cuidado e utilizado um bom transferidor não se pode dizer mais. A demonstração da soma dos ângulos de um triângulo envolve um outro tipo de saber, ela não é uma questão de soma das medidas numéricas mas de comparação geométrica de grandezas: a justaposição de três ângulos igual à justaposição de dois ângulos rectos[9]. Na segunda turma, os alunos estão habituados às regras do debate sócio-cognitivo e põem-se logo de acordo em dizer que a soma dos ângulos de um triângulo é de 180°. Assim, a ideia de demonstração destinada a convencer cada um da certeza do resultado falha, visto que cada um está convencido à priori... e tenta fazer batota nas medições.

Será que esta sequência didáctica se centra no processo de produção da demonstração? Para responder afirmativamente seria necessário saber de que forma medir a soma dos ângulos de vários triângulos permite induzir um raciocínio. A passagem à demonstração, como refere Nicolas Balacheff noutro local, "provém de uma construção simultaneamente de conhecimentos e da racionalidade"[10]. Será que o debate sócio-cognitivo pode permitir esta construção? Num artigo recente, Nicolas Balacheff indica certas limitações para este debate, em particular com jovens alunos, mas, ele pensa que a solução "está no estudo e na melhor compreensão do fenómeno do contracto didáctico, da condição da sua negociação, muitas vezes implícita, e da natureza do seu resultado, a devolução da responsabilidade da aprendizagem aos alunos"[11]. Será então melhorando o *sócio* do *sócio-cognitivo* que se poderá obter um melhor ensino da demonstração? A sequência descrita acima remete-nos antes para o aprofundamento do *cognitivo*. Para que haja debate cognitivo é necessário o confronto de conhecimentos. Ora neste exemplo os alunos são sobretudo levados a defender a qualidade das suas medições, mas muito pouco as suas concepções sobre o que é um ângulo, ou o que é que se passa quando se fecha um ângulo.

Porquê demonstrar? O interesse em possuir uma demonstração sobre a soma dos ângulos de um triângulo reside sobretudo, na sequência proposta, em poder pôr toda a turma de acordo sobre um resultado. Mas não é por esta última razão que os homens construíram conceitos e saberes matemáticos. O primeiro objectivo do matemático é o de resolver os problemas, como lembra Serge Lang.

Abordemos um outro exemplo de ensino através do ensino por situações-problema. Devemos rapidamente definir este termo. Trata-se de um ensino que parte de campos de problemas para construir campos de saberes. Uma situação-problema deve ser ao mesmo tempo uma situação de construção ou de reinvestimento de saberes, e um problema que provoca uma actividade intelectual do aluno.

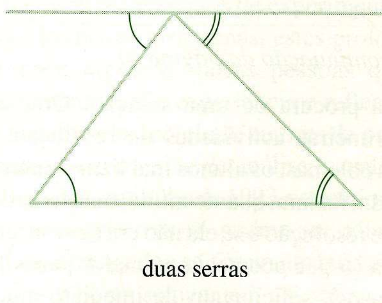
Numa investigação didáctica já antiga, Dina van Hiele propôs um "ensino da geometria apoiado sobre pavimentações" que tinha como objectivos a construção de conceitos da geometria elementar e a construção de uma racionalidade geométrica[12]. Resumiremos brevemente esta sequência didáctica, realizada em 17 sessões e destinada a alunos holandeses de 12 anos. Depois de ter integrado as noções de figuras congruentes — a mesma forma e mesma medida — e de pavimentação, os alunos são convidados a desenhar pavimentações com figuras congruentes a um quadrado, a um losango, a um polígono regular ou irregular, a um triângulo, a um paralelogramo, etc. A pouco e pouco os alunos vão construir e definir conceitos que permitem resolver problemas que surgem: paralelismo de rectas, círculo, ângulos, etc.

Depois de várias sessões, quando os alunos já trabalharam todos os tipos de pavimentações, coloca-se a questão de saber se é possível "prever" as pavimentações realizáveis, isto é, saber com que polígono é possível pavimentar. Estas questões conduzem os alunos a primeiros raciocínios sobre ângulos, e em seguida a introduzir nos seus raciocínios "estruturas geométricas visuais" a que eles chamam de serras e de escadas (fig.1).

Estas configurações são "estruturas estruturadas", que intervêm nas pavimentações englobando as propriedades de paralelismo e de igualdade de ângulos e que vão tornar-se em "estruturas estruturantes"[13], ou seja, as que permitem gerar e organizar conhecimentos (fig. 2).

A organização dos conhecimentos consiste em construir uma *árvore genealógica* segundo a expressão utilizada por Dina van Hiele. A escada e a serra são os "antepassados" a partir dos quais são deduzidas as proposições.

O valor da soma dos ângulos de um triângulo é uma questão que intervém a propósito do problema dos nós de uma pavimentação triangular (fig. 3). A pertinência deste saber é de assegurar o "bom pegamento" da pavimentação. A questão da sua demonstração coloca-se quando se trata de achar os "antepassados" na "grande árvore da geometria". Sobre esta questão dois alunos propõem logo como demonstração: o primeiro duas serras e o segundo uma escada e



duas serras

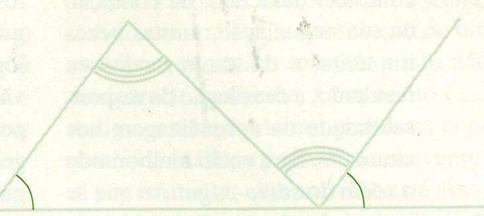
fig. 3

uma serra (fig. 4).

Este ensino apoiado sobre pavimentações provem de uma concepção construtivista, na medida em que se trata de construir ao mesmo tempo conceitos e demonstrações, a partir de um campo de problemas, organizando-se à volta de uma problemática. O sentido da actividade de demonstrar não é convencer mas compreender porquê e como. A demonstração apresenta interesse em si própria num empreendimento de racionalização e de compreensão de uma problemática. O professor explica aos seus alunos que a geometria consiste em fazer uma grande árvore genealógica (são necessários três anos para isso!). Ele explicita e colocando em primeiro plano o processo do saber geométrico.

Uma concepção construtivista do saber implica que demonstrar "se aprende por etapas marcadas, cada uma, não somente por uma troca do universo dos sentidos mas também uma modificação da afinidade do sentido, dos modos de acesso ao conjunto dos referentes"[14]. A leitura da experiência de Dina van Hiele é interessante, pois ela evidencia as etapas do ensino da demonstração. É sobre estas etapas que se deve focar a nossa reflexão de professores.

A perspectiva construtivista necessita de uma reflexão epistemológica aprofundada. Como salienta muito justamente Jean Claude Duperret, ela pressupõe também da parte do professor um encaminhamento, passado o ensino tradicional, que responda igualmente a estratégias de sobrevivência em face desta difícil profissão, até ao ensino construtivista, para o que se torna necessário dominar novas situações.



uma escada e uma serra

fig. 4

Notas

1. in Naudin (1990), *A quoi ça sert d'apprendre? Rapport au savoir, rapport à l'avenir*, D.E.A. Sciences de l'éducation. dir. B. B. Charlot, Paris VIII. No que diz respeito à relação com o saber matemático dos alunos, ver B. Charlot et al, Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques in *Repères IREM* nº 10.
2. Alain, *Propos sur l'éducation*, p. 76.
3. Relatório do grupo Geometria primeiro ciclo, Journées Nationales de l'APMEP, Grenoble, 1979, citado por N. Balacheff em *Preuve et démonstration en mathématiques au collège*.
4. D. Gaud e J. P. Gichard, Apprentissage de la démonstration, in *Petit x*, nº4, 1984.
5. A. L. Mesquita e J. C. Rauscher, Sur une approche d'apprentissage de la démonstration, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1988. .
6. N. Balacheff, op. cit..
7. Ler, por exemplo, N. Balacheff, Processus de preuve et situations de validation, in *Educational Studies in Mathematics*, 1987.
8. N. Balacheff, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de Collège*, vol. 2, p. 361.
9. Sobre a noção de amplitude de um ângulo e sobre a medida das grandezas, ler N. Rouche, *Le sens de la mesure*.
10. Em N. Balacheff, Processus de preuve et situations de validation, in *Educational Studies in Mathematics*, 1987 .
11. Em N. Balacheff, The benefits and limits of social interaction: the case of mathematical proof, in Bishop, *Mathematical Knowledge: its Growth Through Teaching*.
12. D. Van Hiele-Geldof, DE didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O., tese de doutoramento, Utrecht, 1957.
13. Retomo aqui as expressões utilizadas por P. Bourdieu num outro campo problemático, ver *Le sens pratique*, p. 88.
14. N. Rouche, Prouver? amener à l'évidence ou contrôler des implications, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*.

Referências bibliográficas

Alain (1969). *Propos sur l'éducation*, P.U.F., Paris.

Balacheff (1982). Preuve et démonstration en methématiques au collège, *in Recherches en Didactique des mathématiques,* vol. 3, nº3.

Balacheff (1987). Processus de preuve et situations de validation, in *Educational Studies in Mathematics,* nº 18 .

N. Balacheff (1988). The benefits and limits of social interaction: the case of mathematical proof, in Bishop, *Mathematical Knowledge: its Growth Through Teaching,* Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Bourdieu (1980). *Le sens pratique*, Les éditions du Minuit, Paris, 1980.

Charlot et Bautier. Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques in *Repères IREM*, nº 10.

Gaud et Guichard (1984). Apprentissage de la démonstration, in *Petit x*, nº 4.

Mesquita e Rauscher (1988). Sur une approche d'apprentissage de la démonstration, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, nº1.

Naudin (1990). A quoi ça sert d'apprendre? Rapport au savoir, rapport à l'avenir, D. E. A. Sciences de l'éducation, dir. B. Charlot, Paris VIII.

Rouche (1992). *Le sens de la mesure*, Didier Hatier, Bruxelas.

Van Hiele (1957), De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van V.H.M.O., tese, Universidade de Utrecht, tradução G.E.M., Louvain la Neuve.

Evelyne Barbin
I.R.E.M. Paris-Nord

(continuação da página 8)

na procura de uma solução. Ora, nas primeiras actividades de resolução de problemas, os alunos mal liam o enunciado, faziam, quanto muito, uma tentativa de resolução e se ela não era bem sucedida (o que acontecia na maior parte dos casos), solicitavam de imediato ajuda. Os alunos esperavam que lhes explicássemos detalhadamente o que deveriam fazer. A passagem para um envolvimento activo, em que persistentemente se realizam e analisam com entusiasmo vários caminhos de resolução de um problema, foi lenta e envolveu um grande dispêndio de tempo.

Finalmente, pareceu-nos particularmente significativo, o facto da maioria dos alunos ter considerado que com as actividades desenvolvidas em torno da resolução de problemas, *aprenderam a pensar*.

Joana Porfírio, ESE de Setúbal
Olinda Semedo, E. S. Alto do Seixalinho
Teresa O. Albuquerque, E. S. do Barreiro