Uma experiência de resolução de problemas no 7º ano de escolaridade

Joana Porfírio, Olinda Semedo e Teresa Olga Albuquerque

Ao longo do ano procurámos valorizar um processo de ensino-aprendizagem centrado na exploração de situações problemáticas e na resolução de problemas em que a calculadora foi encarada como um importante instrumento facilitador deste processo.

Organização e desenvolvimento da experiência

Durante o ano lectivo de 1991/92 desenvolvemos uma experiência de trabalho com duas turmas de 7º ano de escolaridade, uma da Escola Secundária do Barreiro e outra da Escola Secundária do Alto do Seixalinho, também no Barreiro.

A definição da proposta pedagógica partiu da aceitação de alguns princípios gerais. Destacamos os seguintes:

• A resolução de problemas é importante na formação matemática dos alunos.

• O ensino-aprendizagem da Matemática deve decorrer num ambiente de trabalho que estimule o aluno a envolver-se activamente na construção do seu conhecimento.

• A calculadora pode ser um instrumento importante na construção de conceitos e na resolução de problemas.

• O trabalho em pequenos grupos, na medida em que permite o desenvolvimento de capacidades como argumentar e criticar, expôr as suas ideias e ouvir as dos seus colegas, comparar estratégias e soluções, é uma experiência que deve ser proporcionada aos alunos.

• Na exploração de situações que favoreçam uma participação activa dos alunos é importante dar tempo para que estes possam desenvolver as actividades que lhes são propostas e reflectir sobre elas.

Em relação ao trabalho em torno da resolução de problemas, procurámos:

• apresentar problemas que considerávamos desafiadores;

• questionar os alunos, enquanto resolviam os problemas em grupo, no sentido de os ajudar a explicitar e organizar o modo como pensavam;

• analisar e comparar estratégias de resolução e possíveis extensões do problema.

A exploração das várias potencialidades da calculadora foi sendo feita à medida que o trabalho realizado ao longo das aulas o justificava.

Ao longo do ano, a distribuição semanal das horas lectivas foi de 2 + 1 + 1. De uma forma geral, procurámos combinar dois tipos de aulas: (a) aulas em que os alunos trabalhavam em grupos de 4 ou 5 na resolução das fichas de trabalho que lhes eram propostas e que geralmente ocupavam as aulas de duas horas; (b) aulas em que a partir das actividades exploradas em grupo, se formalizavam conceitos e regras, organizavam sínteses e apresentavam exercícios de prática. Em todas as aulas cada aluno dispunha de uma calculadora não científica.

Numa primeira fase de trabalho com os alunos, que decorreu de Setembro a Dezembro, procurámos sobretudo que os alunos desenvolvessem hábitos de trabalho em grupo e se integrassem numa perspectiva de ensino-aprendizagem em que o professor é sobretudo um organizador de actividades e em que os alunos participam activamente na construção do seu saber. Numa segunda fase, que decorreu a partir de Janeiro procurou-se desenvolver, de uma forma mais sistemática, a capacidade de resolução de problemas.

O tipo de actividades introduzidas

Todas as actividades apresentadas aos alunos envolveram, de uma forma geral, a resolução de problemas. No entanto, podem ser agrupadas em dois tipos:

(a) actividades cuja exploração permitia a introdução ou aprofundamento de conteúdos do programa e (b) actividades cuja ligação com os conteúdos do programa não era tão directa. Como exemplo das actividadesde de tipo (a) apresentamos a ficha "Às voltas com o futebol ..." e como exemplo das actividades de tipo (b) apresentamos a ficha "Descontos e impostos".

Às voltas com o futebol...

1. Observa a tabela que representa a classificação dos clubes da I divisão de futebol.

Nº	Clube	Pontos	Golos marcados	Golos sofridos
1	Porto	24	20	1
2	Benfica	24	26	10
3	Guimarães	21	25	17
4	Sporting	21	23	10
5	Boavista	20	17	12
6	Chaves	16	17	17
7	Estoril	16	14	15
8	Beira-Mar	16	13	14
9	Marítimo	15	14	15
10	Gil Vicente	15	10	12
11	Farense	14	16	18
12	Penafiel	13	11	18
13	Famalicão	13	14	24
14	Salgueiros	13	11	17
15	Braga	12	15	21
16	P. Ferreira	12	13	19
17	U. Madeira	11	10	23
18	Torreense	10	16	22

a) Apresenta uma hipótese dos resultados obtidos pelo Farense em cada um dos 15 jogos que já realizou.

b) Adiciona a coluna dos golos marcados e a coluna dos golos sofridos. Como explicas a relação que encontraste nas duas somas?

c) Chama-se "goal average" à diferença entre os golos marcados e os golos sofridos por cada equipa. Por exemplo, o "goal average" do Porto é 19 e o do Gil Vicente é -2. Calcula o "goal average" de todas as restantes equipas.

d) Coloca as equipas por ordem decrescente segundo o "goal average" de cada uma.

2. Imagina que estás a organizar um torneio de futebol entre quatro turmas do 7º ano de tal modo que cada turma jogue uma vez com cada uma das restantes.

a) Quantos jogos terias que organizar?

b) Agora tens que escrever um artigo sobre o torneio, para o jornal da escola. Não te esqueças de indicar o número de jogos que se realizaram e de incluir um quadro semelhante ao anterior, que resuma os resultados obtidos por cada equipa.

O desenrolar destas actividades

A observação dos alunos e a análise das resoluções das fichas apresentadas por cada grupo, forneceram-nos um conjunto de dados que nos permitiram ir traçando o percurso dos alunos ao longo da experiência.

A título de exemplo vamos descrever a forma como decorreram as aulas em que os alunos resolveram as duas fichas apresentadas.

(a) "Às voltas com o futebol ..."

A primeira reacção da maioria dos alunos a esta ficha foi de grande entusiasmo. A primeira questão não ofereceu dificuldades de maior e pareceu desempenhar um papel importante para os alunos compreenderem a forma como o quadro apresentado na ficha tinha sido construído. Um aspecto que nos pareceu interessante foi o facto de vários grupos não se contentarem em apresentar uma solução mas terem também em conta ela ser ou não plausível. Por exemplo, a solução que vários grupos encontraram com bastante facilidade, de ter empatado todos os jogos e perdido um, foi imediatamente rejeitada por ser pouco provável que tal se pudesse verificar.

Na segunda questão, a justificação da relação encontrada não foi imediata para os alunos. A dificuldade da maioria dos alunos esteve sobretudo no facto de pensarem que a igualdade entre o número total de golos marcados e sofridos poderia ser casual. Só quando lhes foi perguntado se seria possível que estes valores não fossem iguais, os alunos, ao começarem a averiguar se tal poderia acontecer, foram começando a desconfiar de que a relação talvez se verificasse mesmo e do porquê da igualdade. Os caminhos seguidos pelos grupos foram diferentes. Uns tiveram necessidade de começar a acrescentar resultados de mais jogos, outros começaram a construir um quadro idêntico ao apresentado mas com poucas equipas. Assim, a maioria dos grupos conseguiu perceber a situação a partir do momento em que actuou sobre ela.

Nas duas questões seguintes, surgiram pela primeira vez números negativos e a ordenação em **Z**. Os alunos mostraram um grande desembaraço na sua resolução não tendo constituído nenhum obstáculo o facto de nunca terem trabalhado com números negativos.

No problema sobre o torneio de futebol havia três aspectos em causa: (1) perceber o número de jogos que se realizavam, (2) elaborar correctamente um quadro em que constassem as pontuações, os golos marcados e sofridos por cada equipa; (3) organizar um ensaio que pudesse ser uma notícia, a publicar no jornal da escola, sobre o torneio de futebol e em que justificassem as conclusões a que tinham chegado em (1) e (2).

Ao discutirem o número de jogos que se realizaram, a primeira reacção de muitos dos alunos foi ainda de indicarem um número que aparentemente não tinha sido objecto de grande reflexão. Mas ao discutirem os diferentes valores sugeridos no grupo, começaram a organizar melhor o que pensaram e a perceber se tinham ou não cometido algum erro. Assim, na maioria dos grupos, para perceberem o número de jogos realizados, os alunos, depois de atribuírem letras às turmas que participaram no torneio, elaboram um processo de contagem do tipo:

"A - B; A - C; A - D
B - C; B - D
C - D"

Alguns grupos generalizaram rapidamente este problema para situações em que o número de equipas era superior.

Para elaborarem o quadro com as pontuações e com os golos marcados e sofridos, alguns alunos decidiram quais os resultados obtidos em cada jogo e a partir daqui construiram o quadro. Outros seguiram um processo mais rápido. Assim, sem pensarem nos resultados de cada jogo, decidiram de uma forma coerente o número de vitórias, empates e derrotas de cada equipa e calcularam a respectiva pontuação. Depois, ao construírem o quadro, tiveram em conta as conclusões a que tinham chegado anteriormente (a soma da coluna dos golos marcados e dos golos sofridos é igual e há uma certa lógica na ordenação das equipas consoante o valor do seu *goal average*).

A elaboração do artigo para o jornal da Escola suscitou muitas dúvidas nos alunos. No entanto, como este aspecto estava integrado num trabalho que se prolongou por algum tempo não o iremos desenvolver aqui.

(b) "Descontos e impostos"

Incentivados a darem um palpite sobre a solução do problema, a escolha da melhor hipótese diferiu de grupo para grupo. Para uns, é preferível calcular primeiro o imposto porque, como diziam:

"Se calcularmos primeiro o imposto o desconto é maior porque é calculado sobre uma quantia maior e então pagamos menos."

Outros, pelo contrário, defenderam que:

"É melhor calcular primeiro o desconto porque assim paga-se menos imposto."

É com grande entusiasmo que os alunos vão verificar se a sua ideia inicial está correcta. Não se dão por satisfeitos com os resultados da primeira experiência que realizam. Como comenta um aluno:

"Pode ser que só com 1000$00 é que dê igual."

Com o trabalho bastante facilitado pela utilização da calculadora, foi visível a preocupação em realizar bastantes experiências antes de apresentar a conclusão a que chegavam. Só então, a evidência das experiências feitas foi tomada como lei.

Foi também interessante verificar que um grupo analisou o problema com outras percentagens de impostos e de descontos. Um outro grupo, por iniciativa própria, verificou que para o comerciante já não era indiferente a ordem por que se calculava o imposto e o desconto.

Na discussão final numa turma foi levantada a questão da demonstração. Numa primeira fase foi analisada a pergunta, que tinha sido colocada por um grupo: "E se as percentagens de imposto e de desconto, fossem outras?". Perante este desafio, os alunos, entusiasmados, fizeram várias experiências que iam relatando oralmente. Foi então colocada a questão: "Mas como poderemos ter a certeza de que vai ser sempre indiferente?" Os alunos perceberam a ideia e concordaram que apenas poderiam dizer que parecia que a resposta que tinham dado era correcta. A partir desta discussão e dialogando com os alunos chegou-se à demonstração.

Algumas opiniões dos alunos

Com o objectivo de recolher as opiniões dos alunos acerca da experiência vivida, elaborámos um inquérito que focou um conjunto de aspectos relativos à avaliação do trabalho realizado.

Dos 47 alunos das duas turmas, 31 realçaram a relação da resolução de problemas com a compreensão da restante matéria. Para estes alunos esta é uma

Descontos e impostos

Numa loja de artigos de vestuário, tem-se 20% de desconto, mas é necessário pagar um imposto de venda de 17%.

a) O que é preferível calcular primeiro, o desconto ou o imposto? Porquê?

b) Imagina agora que o preço do artigo que compraste é de 1000$00.

- Quanto pagarás se o vendedor fizer primeiro o desconto?

- E se o vendedor aplicar primeiro o imposto?

c) Comenta os resultados que obtiveste e compara-os com a tua resposta inicial.

d) Tenta com outros valores à tua escolha. Que conclusões tiras?

maneira diferente e melhor de lidar com a Matemática pois percebem com mais facilidade alguns conteúdos e aprendem a pensar nas questões que lhes são apresentadas. Incluídas neste grupo foram obtidas por exemplo as seguintes respostas:

"A resolução de problemas ajuda-nos a compreender a matéria com grande facilidade. Os problemas que resolvíamos nas aulas de duas horas preparavam-nos para perceber melhor o trabalho que fazíamos nas aulas individuais. Também nos ajudou a resolver problemas que podem aparecer na vida corrente."

"Esta experiência na resolução de problemas ajudou a perceber as questões da matéria com grande facilidade. Foi uma maneira diferente de aprender a lidar com a Matemática."

"Temos que pensar bem no problema e arranjar maneiras para o resolver e isso faz com que a gente desenvolva o raciocínio e aprenda a pensar."

"Não é importante só saber fazer cálculos. Podemos usar a calculadora e temos tempo para pensar. Por isso a resolução de problemas ajuda a saber pensar e isso é importante."

"Com a resolução de problemas desenvolvemos o raciocínio e os nossos conhecimentos. Ficamos preparados para saber pensar nas coisas novas que nos aparecem."

Para 16 alunos a resolução de problemas é sobretudo motivadora. Como alguns referem:

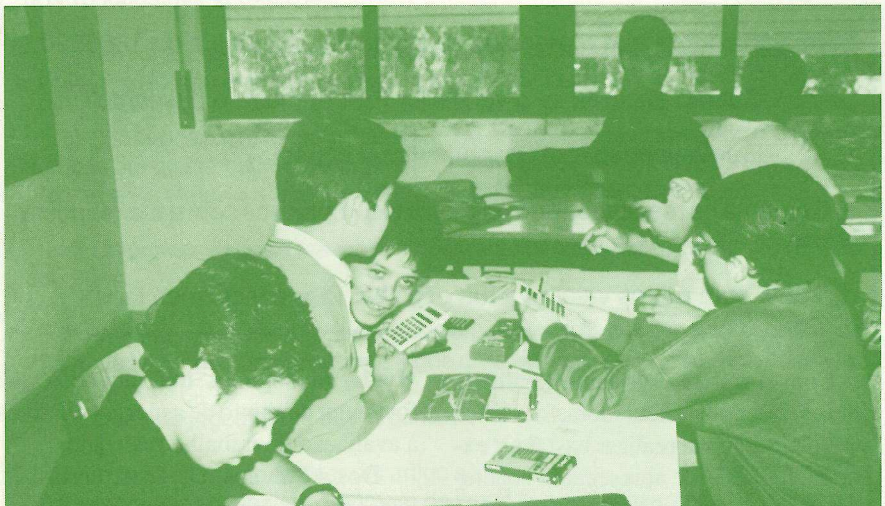
"Resolver problemas motiva os alunos a trabalhar. Temos que pensar bem no problema e podemos experimentar várias maneiras para resolver o problema. Isso faz com que a gente se entusiasme pelo trabalho que vai fazendo."

"Resolver problemas motiva os alunos a trabalhar porque não temos só que fazer contas e podemos pensar em problemas do nosso dia a dia."

"Apesar de para mim ter sido um bocado difícil fiquei entusiasmada porque tive que pensar em problemas que eram divertidos. Por isso fiquei mais interessada na matéria e gostava de trabalhar nas aulas."

Estes alunos realçaram bem o interesse que esta actividade lhes despertou. A ideia de que a resolução de problemas é interessante e de que proporciona um grande envolvimento com o trabalho, está bem patente nas suas afirmações.

Nas respostas incluídas em qualquer das categorias é visível uma ideia, que a experiência em torno da resolução de problemas parece ter realçado: saber Matemática não é só saber fazer cálculos. Expressões como "não era só preciso saber fazer contas" ou "era muito diferente porque não bastava saber só fazer cálculos", foram incluídas nas respostas dos alunos com bastante frequência. As respostas obtidas e a observação dos alunos, permitiram verificar que esta ideia correspondeu uma profunda mudança ao nível do que os alunos pensavam acerca do que era saber Matemática e que a resolução de problemas foi um aspecto determinante nessa mudança.



Conclusões

A experiência realizada nas duas turmas forneceu dados que permitem analisar os percursos dos alunos.

Os alunos evoluíram significativamente em relação à capacidade de resolver problemas. Passaram a conseguir resolver os problemas numa atitude de crescente autonomia.

Houve uma clara evolução em relação à persistência na resolução de um problema. Os alunos desenvolveram confiança nas suas capacidades não desistindo de trabalhar perante uma primeira tentativa frustrada. Em relação a este aspecto notou-se mesmo um corte radical com a atitude por eles inicialmente evidenciada. Os alunos encaravam os problemas como um desafio que eram capazes de ultrapassar.

Também foi possível observar a forma como a calculadora facilitou a persistência na resolução de problemas. Aliviados do peso dos cálculos, os alunos "agarravam-se" à calculadora, não desistindo perante as tentativas frustradas.

Pode-se pois concluir que, em relação a muitos dos aspectos relacionados com a resolução de problemas, os alunos evoluiram significativamente. Mas é importante realçar que esta evolução foi lenta e implicou muito trabalho e envolvimento. Vários autores consideram que para que uma dada tarefa constitua um problema para um dado indivíduo, este deve empenhar-se activamente

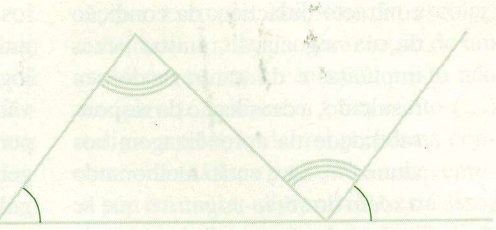
(continua na página 14)

uma serra (fig. 4).

Este ensino apoiado sobre pavimentações provem de uma concepção construtivista, na medida em que se trata de construir ao mesmo tempo conceitos e demonstrações, a partir de um campo de problemas, organizando-se à volta de uma problemática. O sentido da actividade de demonstrar não é convencer mas compreender porquê e como. A demonstração apresenta interesse em si própria num empreendimento de racionalização e de compreensão de uma problemática. O professor explica aos seus alunos que a geometria consiste em fazer uma grande árvore genealógica (são necessários três anos para isso!). Ele explicita e colocando em primeiro plano o processo do saber geométrico.

Uma concepção construtivista do saber implica que demonstrar "se aprende por etapas marcadas, cada uma, não somente por uma troca do universo dos sentidos mas também uma modificação da afinidade do sentido, dos modos de acesso ao conjunto dos referentes"[14]. A leitura da experiência de Dina van Hiele é interessante, pois ela evidencia as etapas do ensino da demonstração. É sobre estas etapas que se deve focar a nossa reflexão de professores.

A perspectiva construtivista necessita de uma reflexão epistemológica aprofundada. Como salienta muito justamente Jean Claude Duperret, ela pressupõe também da parte do professor um encaminhamento, passado o ensino tradicional, que responda igualmente a estratégias de sobrevivência em face desta difícil profissão, até ao ensino construtivista, para o que se torna necessário dominar novas situações.



uma escada e uma serra

fig. 4

Notas

1. in Naudin (1990), *A quoi ça sert d'apprendre? Rapport au savoir, rapport à l'avenir*, D.E.A. Sciences de l'éducation. dir. B. B. Charlot, Paris VIII. No que diz respeito à relação com o saber matemático dos alunos, ver B. Charlot et al, Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques in *Repères IREM* nº 10.
2. Alain, *Propos sur l'éducation*, p. 76.
3. Relatório do grupo Geometria primeiro ciclo, Journées Nationales de l'APMEP, Grenoble, 1979, citado por N. Balacheff em *Preuve et démonstration en mathématiques au collège*.
4. D. Gaud e J. P. Gichard, Apprentissage de la démonstration, in *Petit x*, nº4, 1984.
5. A. L. Mesquita e J. C. Rauscher, Sur une approche d'apprentissage de la démonstration, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1988. .
6. N. Balacheff, op. cit..
7. Ler, por exemplo, N. Balacheff, Processus de preuve et situations de validation, in *Educational Studies in Mathematics*, 1987.
8. N. Balacheff, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de Collège*, vol. 2, p. 361.
9. Sobre a noção de amplitude de um ângulo e sobre a medida das grandezas, ler N. Rouche, *Le sens de la mesure*.
10. Em N. Balacheff, Processus de preuve et situations de validation, in *Educational Studies in Mathematics*, 1987 .
11. Em N. Balacheff, The benefits and limits of social interaction: the case of mathematical proof, in Bishop, *Mathematical Knowledge: its Growth Through Teaching*.
12. D. Van Hiele-Geldof, DE didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O., tese de doutoramento, Utrecht, 1957.
13. Retomo aqui as expressões utilizadas por P. Bourdieu num outro campo problemático, ver *Le sens pratique*, p. 88.
14. N. Rouche, Prouver? amener à l'évidence ou contrôler des implications, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*.

Referências bibliográficas

Alain (1969). *Propos sur l'éducation*, P.U.F., Paris.

Balacheff (1982). Preuve et démonstration en methématiques au collège, *in Recherches en Didactique des mathématiques,* vol. 3, nº3.

Balacheff (1987). Processus de preuve et situations de validation, in *Educational Studies in Mathematics,* nº 18 .

N. Balacheff (1988). The benefits and limits of social interaction: the case of mathematical proof, in Bishop, *Mathematical Knowledge: its Growth Through Teaching,* Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Bourdieu (1980). *Le sens pratique*, Les éditions du Minuit, Paris, 1980.

Charlot et Bautier. Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques in *Repères IREM*, nº 10.

Gaud et Guichard (1984). Apprentissage de la démonstration, in *Petit x*, nº 4.

Mesquita e Rauscher (1988). Sur une approche d'apprentissage de la démonstration, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, nº1.

Naudin (1990). A quoi ça sert d'apprendre? Rapport au savoir, rapport à l'avenir, D. E. A. Sciences de l'éducation, dir. B. Charlot, Paris VIII.

Rouche (1992). *Le sens de la mesure*, Didier Hatier, Bruxelas.

Van Hiele (1957), De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van V.H.M.O., tese, Universidade de Utrecht, tradução G.E.M., Louvain la Neuve.

Evelyne Barbin
I.R.E.M. Paris-Nord

(continuação da página 8)

na procura de uma solução. Ora, nas primeiras actividades de resolução de problemas, os alunos mal liam o enunciado, faziam, quanto muito, uma tentativa de resolução e se ela não era bem sucedida (o que acontecia na maior parte dos casos), solicitavam de imediato ajuda. Os alunos esperavam que lhes explicássemos detalhadamente o que deveriam fazer. A passagem para um envolvimento activo, em que persistentemente se realizam e analisam com entusiasmo vários caminhos de resolução de um problema, foi lenta e envolveu um grande dispêndio de tempo.

Finalmente, pareceu-nos particularmente significativo, o facto da maioria dos alunos ter considerado que com as actividades desenvolvidas em torno da resolução de problemas, *aprenderam a pensar*.

Joana Porfírio, ESE de Setúbal
Olinda Semedo, E. S. Alto do Seixalinho
Teresa O. Albuquerque, E. S. do Barreiro