Estudando juros em diversos momentos da História

J. Manuel Matos[1]

Neste texto procuramos utilizar uma abordagem histórica de um tema da vida real com o estudo das progressões e simultaneamente servir de pretexto para que os alunos desenvolvam a sua capacidade de matematização.

O professor poderá dividir a turma em grupos que procurarão efectuar as actividades propostas nas fichas de trabalho. Será muito vantajoso utilizar uma folha de cálculo, um programa traçador de gráficos ou a calculadora gráfica.

Na primeira actividade (Ficha 1) procuraremos encontrar um processo de calcular a taxa de juro a partir da informação fornecida numa tábua de barro babilónica datada de 2 000 a.C. A tábua está incompleta e apenas se consegue ler:

> Vinte manehs de prata, o preço de lã, propriedade de Belshazzar, o filho do rei. ... Toda a propriedade de Nadin-Merodach na cidade e campo será a hipoteca de Belshazzar, o filho do rei, até que Belshazzar receba todo o dinheiro assim como o juro sobre ele.

A interpretação da tábua não é imediata, e por isso as primeiras actividades solicitadas aos alunos concentram-se no estudo do conteúdo da tábua e podem ser feitas através de um diálogo envolvendo toda a turma. Talvez se consiga fazer sentido do que está escrito se notarmos o que conseguimos saber sobre cada personagem desta história.

Quem são os personagens? Em primeiro lugar existe *Belshazzar*. Descobrimos que é o filho do rei e que possui um quantidade apreciável de lã no valor de vinte manehs de prata. Depois existe *Nadin-Merodach* do qual sabemos que tem propriedades na cidade e no campo.

Que relação existe entre os dois? Os dois parece terem uma relação comercial. Belshazzar vende a lã e Nadin-Merodach está disposto a comprar. Não sabemos se vinte manehs de prata é muito ou pouco, no entanto podemos conjecturar que se trata de uma quantidade apreciável, já que, por um lado, foi preciso hipotecar toda a propriedade de Nadin-Merodach. Por outro, apesar deste último ter recursos, não conseguiu pagar imediatamente a lã e vai ter de recorrer a uma hipoteca. Belshazzar parece ainda ser um homem disposto a correr riscos, já que se acontecer algo à lã ficará sem todas as suas propriedades.

Em suma, a tábua conta-nos os termos em que Nadin-Merodach hipotecou toda a sua propriedade a Belshazzar para comprar uma quantidade apreciável de lã.

Após garantir que os alunos compreenderam o conteúdo da tábua, podemos calcular a progressão da dívida de Nadin-Merodach se ele protelar o pagamento. Uma forma de simplificar os cálculos é aplicar as progressões geométricas ao estudo do problema dos juros. Com alguma experimentação e recorrendo à álgebra descobre-se que, se t é a taxa de juro de um empréstimo e e o montante emprestado, p, o valor a pagar ao fim de n anos, será dado por

$$p = e(1+t)^n$$

O montante a pagar é uma progressão geométrica de razão $1+t$.

É importante estabelecer uma terminologia adequada, distinguindo entre *juro* (o montante a receber pela cedência de uma certa quantidade de dinheiro) e *taxa de juro* (a taxa ou proporção através da qual o juro é calculado).

Uma questão interessante é saber a partir de que momento o montante em dívida duplica (ou triplica). Este problema pode ser resolvido por diversos processos e em todos eles estamos implicitamente a considerar uma extensão da progressão inicial a todo o **R**.

1º processo: Utilizando uma calculadora pode-se tentar efectuar aproximações sucessivas de n na expressão

$$1,33^n = 2$$

experimentando diversos valores para n.

2º processo: Utilizando uma calculadora gráfica ou um traçador de gráficos fazer a intersecção da função $f(x) = 1,33^n$ com a função $g(x) = 2$.

3º processo: Por inspecção directa de uma tabela observa-se que o valor pretendido está entre o 2º e o 3º ano. Pode-se então fazer uma interpolação linear entre estes dois anos. Este processo corresponde a imaginar que, ao longo do ano, o juro é proporcional ao tempo. É interessante constatar que este processo é utilizado pelos bancos para interpolar juros durante o ano.

4º processo: Este é o processo mais imediato para alunos que já dominam logaritmos. Basta resolver

$$2e = e(1 + 0,33)^n$$

isto é

$$2 = (1 + 0,33)^n$$

ou seja,

$$n = \frac{log 2}{log 1,33}$$

que dá como valor aproximado $n \approx 2,43056905 \approx 2,4$

O problema da duplicação do montante em dívida pode pois ser resolvido de forma diferenciada, consoante a sofisticação das ferramentas matemáticas disponíveis. Os processos indicados acima são apenas alguns dos possíveis. Certamente que existem outros, mais ou menos sofisticados, mais ou menos aproximados de uma solução.

É importante permitir que os alunos encontrem caminhos próprios para resolver este problema. A actividade de busca de ferramentas matemáticas adequadas e a sua discussão na turma é uma das formas mais poderosas de desenvolver a capacidade de matematização nos alunos.

Uma segunda actividade é proposta pela Ficha 2 e parte de um problema colocado por Fibonacci:

Um certo homem coloca um denário a juros com uma taxa tal que em cinco anos ele tem dois denários e em cada cinco anos a partir daí o dinheiro duplica. Eu pergunto quantos denários ganharia a partir deste denário em cem anos?

A questão original de Fibonacci é de fácil resolução e, recorrendo a cálculos simples, encontramos a solução 2^{20} denários.

Este problema inicial leva-nos, no entanto a um outro, que é o de saber qual a taxa de juro anual que Fibonacci estava implicitamente a utilizar. Por outras palavras, qual a taxa de juro anual sabendo que o montante colocado a juros duplica em cinco anos.

Tal como o exemplo da tábua babilónica, este problema pode ser resolvido por mais do que um processo.

1º processo: Um primeiro processo para resolver este problema é experimentar diversas taxas de juros e encontrar a solução por aproximações sucessivas.

2º processo: Este problema pode também ser resolvido utilizando uma calculadora gráfica ou um programa de desenho de gráficos de funções e estudar a intersecção das funções

$$f(x) = 2$$
$$f(x) = (1+t)^5.$$

3º processo: Este processo necessita de alguma álgebra e recorre aos radicais. Se d for o montante colocado a juros, e t o número de anos decorridos, uma equação que descreve a situação é:

$$2d = d(1+t)^5$$

ou, simplificando

$$2 = (1+t)^5.$$

Donde, finalmente,

$$t = \sqrt[5]{2} - 1 \approx 0,148698354997 \approx 0,15$$

É provável que existam ainda outros processos para resolver ambas as situações.

Bibliografia:

Historical topics in algebra (1971). Washington: NCTM.

Lange, L. (1979). Some everyday applications of the theory of interest. Em S. Sharron e R. Reys (Eds.), *Applications in school mathematics* (pp. 98-108). Reston, Virgínia: NCTM.

Ficha 1 — Os juros na Babilónia

O pagamento de juros é já muito antigo. Uma tábua babilónica de 2000 a.C. contém a seguinte descrição:

Vinte manehs de prata, o preço de lã, propriedade de Belshazzar, o filho do rei. ... Toda a propriedade de Nadin-Merodach na cidade e campo será a hipoteca de Belshazzar, o filho do rei, até que Belshazzar receba todo o dinheiro assim como o juro sobre ele.

1) Coloca-te no papel do investigador em História e procura entender o conteúdo desta tábua.

Quem são os personagens referidos na tábua?
O que sabemos sobre Belshazzar?
O que sabemos sobre Nadin-Merodach?
Que relação existe entre os dois?
Quem deve e quem tem a haver?

As taxas de juro na Babilónia podiam chegar a 33% ao ano. Isto é ao fim de um ano o devedor passaria a dever o valor inicial e mais 33% desse valor.

2) Calcula qual o valor que Nadin-Merodach ficaria a dever ao longo dos anos se a taxa de juro fosse efectivamente 33% ao ano.

3) Calcula qual o montante que Nadin-Merodach deveria pagar se a taxa de juro fosse 10%?

4) Ao fim de quanto tempo Nadin-Merodach deve o dobro do que devia inicialmente se a taxa de juro for de 33%? E se for 10%?

5) Ao fim de quanto tempo Nadin-Merodach deve o triplo do que devia inicialmente se a taxa de juro for de 10%?

[1] Esta actividade foi desenvolvida no âmbito do Projecto Pólya, apoiado pela JNICT/IIE e contou com a colaboração de António Pita Roque, Carla Cordeiro, Cláudia Isabel Esteves, Cristina Isabel Amaro, Luís Manuel Colaço Gabriel, Olga Pintado Vinhas, Rita Alexandra Basso, alunos da Licenciatura em Ensino da Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNL e de António Domingos, assistente da mesma faculdade.

José Manuel Matos
Fac. de Ciências e Tecnologia,UNL

Ficha 2 — Os juros em Itália no século XII

No livro *Liber abaci* de Fibonacci (Leonardo de Pisa), escrito em 1202, aparece o problema seguinte:

Um certo homem coloca um denário a juros com uma taxa tal que em cinco anos ele tem dois denários e em cada cinco anos a partir daí o dinheiro duplica. Eu pergunto, quantos denários ganharia a partir deste denário em cem anos?

1) Qual a solução do problema de Fibonacci?
2) Qual seria então a taxa de juro anual?

Egípcios, hindus, tentativas e aritmética

Albano Silva

As duas situações problemáticas apresentadas nas páginas seguintes destinam-se basicamente a alunos do 2º Ciclo do Ensino Básico.

Na situação I em que se recorre aos antigos egípcios e aos seus números enigmáticos é dada ênfase ao método de resolução de problemas por tentativa e erro, dando a entender a sua importância na construção da matemática ao longo dos tempos. Actualmente a possibilidade de utilização da calculadora favorece bastante a resolução de problemas deste tipo ou por este método, que permite abordar determinado tipo de problemas antes da sua formalização matemática. Se no 2º Ciclo são possíveis discussões e explorações matemáticas diversas a partir do problema apresentado, nomeadamente uma abordagem simples à noção de variável, no 3º Ciclo poderá ser uma actividade a utilizar para despoletar o estudo das equações.

A situação II em que se recorre a um matemático hindu, Aryabhata, e também a problemas numéricos estão em jogo três tipos de objectivos que aqui se relevam. À volta do termo *método de inversão* coloca-se de uma forma directa a compreensão da noção de operação inversa mas também um método conhecido e bastante utilizado de resolução de alguns problemas em matemática — a resolução de problemas a partir do fim para o princípio, que no caso concreto se conclui após esquematizar a situação colocada.

Intimamente ligado a este último aspecto coloca-se o terceiro nível de objectivos — a conveniência de, em determinadas situações, compreender a possibilidade e abandonar o método das tentativas na procura de uma regra geral que permita e facilite resolver problemas de um mesmo tipo. Trata-se de um salto fundamental na experiência matemática dos alunos neste nível de escolaridade que ganha bastante quando vivida no seio de um grupo de trabalho em que se discutem estratégias e resultados e quando existe um esforço suplementar de elaboração de um pequeno relatório sobre as descobertas realizadas a partir de exemplos concretos.

É, a nosso ver, a capacidade de comunicar matematicamente que ganha maior relevância com esta metodologia de trabalho e organização da sala de aula.

Enquanto a primeira situação apresentada poderá ser trabalhada individualmente, nesta segunda muita da sua riqueza de descoberta e comunicação se perderia não optando por uma metodologia de trabalho de grupo.

Ainda sobre a situação II ela poderá, em níveis superiores ao 2º Ciclo, inspirar actividades para introduzir a noção de função inversa.

Mas estas são apenas algumas considerações, incompletas e discutíveis por certo, à volta de duas actividades construídas com inspiração numa pequena publicação de 74 páginas, editada pelo NCTM em 1991 e da autoria de Merle Mitchell, intitulada *Mathematical History — Activities, Puzzles, Stories and Games*. Esta publicação, que se encontra disponível no Centro de Recursos da APM, sugere um conjunto de materiais e actividades em torno da história da matemática para os 4º, 5º e 6º anos de escolaridade. Algumas das actividades apetece traduzir e usar imediatamente, outras, talvez a maior parte, sugerem adaptações e novas ideias. Trabalhar sobre a história da matemática não é reconhecidamente uma tarefa simples, apesar de importante, nestes níveis de escolaridade nem proliferam actividades sobre o tema. Por tudo isso, vale a pena desfolhar esta publicação do NCTM e inspirarmo-nos!

Albano Silva
Escola Superior de Educação de Portalegre