A reforma curricular e a História da Matemática

Jaime Carvalho e Silva

Uma abordagem crítica dos novos programas, e alguns exemplos concretos de utilização na sala de aula.

Ultimamente tem-se ouvido falar muito de História da Matemática entre nós. Até parece que está na moda. É verdade que está na moda e por razões meramente circunstanciais. Mas também é preciso reconhecer que cada vez há mais pessoas em Portugal (e no resto do mundo) a preocupar-se com o ensino da Matemática e que, pelas razões adiante detalhadas, a História da Matemática desempenha um papel importante na discussão do que fazer para melhorar o ensino.

Infelizmente a História da Matemática, como outros tópicos, só apareceu nos textos oficiais devido à necessidade premente de reformar o sistema de ensino por via do estado lastimoso em que se encontra. E reformou-se, do modo mais espaventoso possível (com dia D e tudo... como se se tratasse do Grande Desembarque em terras do inimigo Insucesso Escolar!). Os Documentos Preparatórios da Reforma (ainda alguém se lembra 'disso'?) ficarão para a nossa triste história do ensino e farão o deleite dos historiadores daqui a 20 ou 30 anos. Uma primeira nota: nesses documentos a Matemática é bastante maltratada e nenhuma referência havia a coisas como a 'resolução de problemas', as 'calculadoras' ou os 'computadores', as 'aplicações da matemática' ou a 'história da matemática'. Depois, quando apareceram os programas propriamente ditos, a linguagem mudou, mais para justificar a Reforma e as críticas aos Documentos Preparatórios do que para significar uma efectiva alteração da política educativa oficial.

O mínimo que se pode dizer das referências nos documentos oficiais a questões interessantes actualmente muito faladas, é que são claramente irrealistas pois pouco ou nada foi feito para que possam ser levadas à prática. No caso da História da Matemática isso é particularmente evidente. Onde está a bibliografia que suporta actividades de História da Matemática? Infelizmente, podemos resumir a situação dizendo que, disponível em Portugal actualmente, existe apenas um livro, de boa qualidade mas muito resumido, da autoria de D. J. Struik. Outros livros existem em português mas abordando apenas aspectos parcelares como um livro que contém muitas referências à História da Matemática, *Conceitos fundamentais da matemática* do português Bento de Jesus Caraça (1901-1948), um mui pequeno livro de J. Tiago de Oliveira (1928-1992) intitulado *O Essencial sobre a História da Matemática em Portugal*, um outro livro com índole histórica *Número, a linguagem da ciência* de Tobias Dantzig que está há muito esgotado. Existem ainda duas traduções brasileiras de difícil obtenção em Portugal. Demasiado pouco. Que fizeram as instituições responsáveis para alterar esta situação?

Eis o que afirmam os novos programas para o 3º ciclo (para os outros ciclos aparecem referências semelhantes pelo que me dispenso de as referir aqui) nas suas considerações gerais:

> Reconhecer o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através dos tempos (Objectivos gerais-valores atitudes, p. 10)
>
> Relacionar etapas da história da matemática com a evolução da humanidade (Objectivos gerais-capacidades/aptidões, p. 11)

Eis o que afirmam os mesmos programas nas observações aos diversos capítulos do programa:

A propósito do teorema de Pitágoras é útil fazer-se uma referência à História da Matemática (a Matemática nos Egípcios, nos Gregos, a corda de 12 nós, a demonstração na História da Matemática).(Observações/sugestões metodológicas, 8º ano, p. 36)

Se oportuno, os alunos poderão fazer um pequeno trabalho em grupo sobre a resolução de equações na História da Matemática (resolução de equações particulares na antiguidade, Pedro Nunes e a resolução de equações, a escrita simbólica e o seu contributo para o avanço na resolução de equações e sua utilização, etc.).(Observações/sugestões metodológicas, 9º ano, p. 59)

Aspectos da História da Matemática relacionados com a trigonometria — como apareceu, qual o seu contributo, curiosidades interessantes (como Eratóstenes determinou o raio da Terra, por exemplo), etc., poderão ser objecto de trabalhos dos alunos ao longo ou depois do estudo desta unidade. (Observações/sugestões metodológicas, 9º ano, p. 61)

Um pequeno trabalho sobre a geometria na História da Matemática poderá contribuir para um outro tipo de reflexão [sobre axiomas, teoremas, demonstração,...] (Observações/sugestões metodológicas, 9º ano, p. 63)

Como se poderá passar tudo isto à prática? A bibliografia é escassíssima, a formação é escassíssima (o Ensino da Matemática **não** é prioridade do programa nacional de formação contínua!!!!!), só sobram os manuais escolares — e alguns deles, poucas ou nenhumas referências fazem à História da Matemática.

Significará isto que a História da Matemática nunca poderá passar para dentro da sala de aula? Ou que não tem a relevância que os novos programas lhe querem dar? Não, na realidade penso que a História da Matemática tem um papel muito relevante a desempenhar na melhoria do ensino da Matemática, correndo-se o risco grave de ser esquecida daqui a uns anos por ter sido introduzida nos textos oficiais de forma inconsequente.

Começo por distinguir dois aspectos: a história do ensino da Matemática e a história da evolução da ciência matemática. A primeira é extremamente útil aos professores, pois dá-lhes uma maior distanciação e uma maior capacidade crítica em relação à situação presente. Permite ver como é que a Matemática era ensinada noutros tempos, quais os problemas que os professores enfrentaram, porque é que outras reformas do ensino triunfaram ou fracassaram. Quanto à segunda, podemos resumir, dizendo com André Weil que perguntar **"Porquê a História da Matemática?"** é o mesmo que perguntar **"Porquê a Matemática?"**, ou seja, a História da Matemática está indissoluvelmente ligada à sua própria História. Até porque ao contrário de outras disciplinas, como a Física e a Química, a História da Matemática mostra a própria abordagem dos problemas, os conceitos e teoremas demonstrados há séculos, como o Teorema de Pitágoras continuam válidos e importantes hoje em dia. Não quer dizer que o caminho

História na aula de Matemática

Aristarco de Samos e as divisões*

Nem só a Matemática exacta é importante, e noutras épocas já havia a preocupação de encontrar resultados que, embora não totalmente exactos pudessem ser mais manejáveis na prática e pudessem mais facilmente ser compreendidos.

Aristarco de Samos foi um astrónomo grego (séc. III a.C.); calculou a distância da Terra ao Sol, e apresentou pela primeira vez a teoria heliocêntrica.

No decurso dos seus cálculos de astronomia pretendia apresentar um valor aproximado da divisão de 71 755 875 por 61 735 500. Ele afirmou que era aproximadamente igual à divisão de 43 por 37, por defeito.

Questão:

Verifica a precisão da aproximação. O erro é grande? (O que é 'grande'?)

Aristarco não indica o modo como fez os cálculos, mas provavelmente usou o algoritmo de Euclides. Eis como funciona

$$71\ 755\ 875 = 61\ 735\ 500 + 10\ 020\ 375$$
$$61\ 735\ 500 = 6 \times 10\ 020\ 375 + 1\ 613\ 250$$
$$10\ 020\ 375 = 6 \times 1\ 613\ 250 + 340\ 875$$

Como 340 875 é muito pequeno em relação aos números em jogo, podemos desprezá-lo e assim

$$\begin{aligned} 71\ 755\ 875 &= 61\ 735\ 500 + 10\ 020\ 375 \\ &= (6 \times 10\ 020\ 375 + 1\ 613\ 250) + 10\ 020\ 375 \\ &= \big(6 \times (6 \times 1\ 613\ 250 + 340\ 875) + 1\ 613\ 250\big) + \\ &\quad + (6 \times 1\ 613\ 250 + 340\ 875) \\ &\approx \big(6 \times (6 \times 1\ 613\ 250) + 1\ 613\ 250\big) + 6 \times 1\ 613\ 250 \\ &\approx 43 \times 1\ 613\ 250 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 61\ 735\ 500 &= 6 \times 10\ 020\ 375 + 1\ 613\ 250 \\ &= 6 \times (6 \times 1\ 613\ 250 + 340\ 875) + 1613250 \\ &\approx \big(6 \times (6 \times 1613250)\big) + 1613250 \end{aligned}$$

Logo, dividir 71 755 875 por 61 735 500 é aproximadamente igual a dividir 43 por 37. Porquê por defeito?

Questões:

1. Aristarco também afirma que 7921 a dividir por 4050 é aproximadamente igual a 88 a dividir por 45.
2. Escolhe dois números grandes e aplica-lhe o processo de Aristarco para obter dois números cuja divisão dê aproximadamente o mesmo resultado que a dos números iniciais.

* Em *Essais d'Histoire des Mathématiques*, Jean Itard, Ed. Albert Blanchard, Paris, 1984; e *Nombre, mesure et continu*, Jean Dhombres, Ed. Cedic/Nathan, Paris, 1978.

percorrido tenha sido linear, como põe em evidência Ian Stewart no seu livro *Os problemas da matemática*:

> Ideias matemáticas realmente boas são difíceis de obter. Resultam do trabalho conjunto de muitas pessoas durante longos períodos de tempo. A sua descoberta envolve caminhos errados e becos sem saída intelectuais. Não podem ser produzidas como nos apetece: a matemática verdadeiramente nova não está sujeita a uma abordagem industrial tipo 'Investigação e Desenvolvimento'. Mas compensam todo esse esforço com a sua durabilidade e versatilidade. A teoria do sistema solar de Ptolomeu tem interesse histórico para um cosmologista moderno, mas ele não a *usa* na investigação a sério. Contrariamente, ideias matemáticas com centenas de anos de idade são usadas todos os dias na matemática mais moderna, na verdade em todos os ramos da ciência. A ciclóide era uma curiosidade fascinante para os Gregos, mas não podiam *fazer* nada com ela. Como braquistócrona, fez surgir o cálculo das variações. Christiaan Huygens usou-a para projectar um relógio preciso. Hoje os engenheiros usam-na para projectar alavancas de mudanças. Aparece na mecânica celeste e nos aceleradores de partículas. É uma carreira notável para tão humilde criação.

História na aula de Matemática

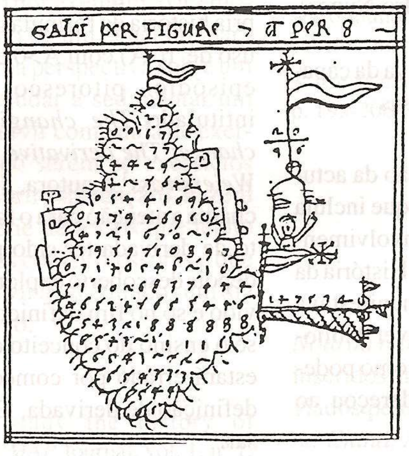
O método do galeão

Esta actividade mostra aos alunos que nem sempre os cálculos se fizeram usando os algoritmos como os que hoje são usados, e assim talvez eles fiquem convencidos que os nossos algoritmos têm algo de superior. Apesar de parecer elementar, é uma boa actividade de revisão das capacidades de cálculo, pudendo, por exemplo, ser usada logo na primeira aula de um ano lectivo.

"Os árabes (e através deles os europeus mais tarde) parecem ter adoptado a maior parte dos seus métodos aritméticos da Índia, e por isso é provável que o esquema de divisão conhecido como 'método de riscar' ou 'método do galeão' (pela sua semelhança com um navio) também venha da Índia. Para ilustrar o método, suponhamos que se queira dividir 44 977 por 382. Na figura da esquerda damos o método moderno e na figura da direita o do galeão. Este último assemelha-se muito ao primeiro, apenas o dividendo aparece no meio, porque as subtracções são executadas riscando dígitos e colocando as diferenças *acima* em vez de *abaixo* dos diminuidores. Por isso o resto, 283, aparece acima e à direita, em vez de em baixo. O processo é fácil de acompanhar se observarmos que os dígitos num dado diminuidor, como 2 674, ou numa dada diferença, como 2 957, não estão todos necessariamente na mesma linha e que diminuidores são escritos abaixo do meio e diferenças acima."*

```
44977 | 382
382   | 117
 677
 382
2957
2674
 283
```

```
           2
          23
         398
       16753
382 | 44977 | 117
       38224
         387
          26
```



Divisão em galeão, século XVI. De um manuscrito de um monge veneziano.

* Extraído de História da Matemática, Carl Boyer, Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1974.

Ou seja, ao olhar para a História da Matemática estamos a olhar para a própria Matemática. Mas mais aspectos podem ser considerados. Seguindo D. J. Struik[1] podemos dizer que a **História da Matemática** é muito importante porque:

i. satisfaz o desejo de saber como é que os conceitos matemáticos apareceram e se desenvolveram;
ii. o estudo dos autores clássicos pode oferecer grande satisfação em si, mas também pode servir de guia no trabalho matemático;
iii. ajuda a compreender a nossa herança cultural, não só através das aplicações que a matemática teve e ainda tem à astronomia, física e outras ciências, mas também através da relação que teve e ainda tem com campos tão variados como a arte, a religião, a filosofia e os ofícios;
iv. oferece um campo de discussão comum com estudantes e professores de outras áreas;
v. fornece um pano de fundo para se compreenderem as tendências no Ensino da Matemática no passado e no presente;
vi. pode-se temperar o ensino com conversas e anedotas[2].

É por isso importante falar do lugar da História da Matemática no Ensino, esperando que não aconteça como há cerca de vinte anos em que os *Compêndios de Álgebra* de Sebastião e Silva e de Silva Paulo, sendo livros únicos e contendo abundantes referências à História da Matemática, viram suceder-lhes livros de texto enfadonhos e tecnicistas com ausência de referências à História da Matemática. E as referências nos *Compêndios de Álgebra* não eram tão poucas como isso. No prefácio encontramos:

Matemáticos Portugueses

José Sebastião e Silva (1914-1972)

Nasceu em Mértola. Em 1937 licenciou-se em C. Matemáticas na Faculdade de Ciências de Lisboa,onde foi assistente de Álgebra e regente de Complementos de Álgebra até 1943, ano em que, como bolseiro do Instituto de Alta Cultura, partiu para Roma; aí especializou-se em Análise Funcional. Doutorou-se na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Foi prof. catedrático no Instituto Superior de Agronomia, na Faculdade de Ciências de Lisboa e e membro da Academia de Ciências de Lisboa. Durante 20 anos dirigiu o Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, onde obtiveram uma formação actualizada, e foram orientados para investigação, licenciados que viriam a ocupar posições destacadas na actividade matemática portuguesa. Foi considerado por Aniceto Monteiro "o maior matemático português".

Interveio, com todo o peso da sua competência como matemático e pedagogo, na modernização do ensino da Matemática; promoveu e orientou "experiências-piloto" decisivas naquela modernização, a nível secundário.

Os seus trabalhos de investigação foram reunidos em 3 volumes *Obra Científica de José Sebastião e Silva* (INIC-1985) e, noutros tantos volumes, está a ser compilada a *Obra Didáctica de José Sebastião e Silva* (SPM/FCG).

Compilação de Sérgio Macias Marques

(...) inserção das matérias no quadro de uma cultura geral, que tempere e humanize o abstractismo inerente à matemática, procurando explicá-la como processo histórico (...) (Prefácio ao *Compêndio de Álgebra*, 1º tomo, 6º ano, 1956 - 2ª edição 1970)

Mais adiante, pode ler-se:

A leitura deste número [parágrafo sobre grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis] tem especial interesse para a cultura geral do aluno. O assunto aqui tratado liga-se directamente ao da NOTA HISTÓRICA, cuja leitura é igualmente recomendável por idênticas razões (*Compêndio de Álgebra*, 1º tomo, 6º ano, 1956 - 2ª edição 1970, p. 67)

E ambos os volumes estavam salpicados com *Notas Históricas* que eram muito mais do que uma simples cronologia de acontecimentos:

Notas históricas

(*Compêndio de Álgebra*, 1956 - 2ª edição 1970)

tomo 1:

- evolução do conceito de número (4 p.) (até à calculadora electrónica - com uma foto);
- noção de função (4 p.);
- infinito, infinitésimo e limite (5 p.);
- Newton, Leibniz, cálculo diferencial e integral (7 p.).

tomo 2:

- da álgebra geométrica à álgebra numérica; da álgebra sincopada à álgebra simbólica; resolubilidade algébrica (10 p.); (com uma referência a Pedro Nunes)
- logaritmos (6 p.) (com uma tabela comparativa da capacidade de cálculo de diversas calculadoras).

Observemos a preocupação da actualização de Sebastião e Silva que incluía referências aos últimos desenvolvimentos (máquinas de calcular) e à História da Matemática em Portugal. E manifestava também preocupação em haver bibliografia adequada disponível, como podemos ler numa carta que endereçou ao Prof. António Guimarães:

Conviria salientar que, tendo entrado em funcionamento a cadeira de História do Pensamento Matemático da nova reforma, os alunos carecem de bibliografia sobre o assunto e que esta interessa a um público vasto, que inclui em particular os professores de matemática, de filosofia e de história do ensino secundário.

(Carta ao Prof. António Guimarães sobre a tradução para português do livro do célebre matemático italiano F. Enriques *Questioni riguardanti Le Matematiche Elementari*, 1968).

Muito ficou já dito, mas não me parece ainda claro o *como*. Como introduzir a História da Matemática no Ensino? Penso que aqui ainda há lugar para muita investigação e muitas experiências. Aquilo que vou dizer a seguir não passam de meras sugestões e opiniões pessoais.

Um primeiro aspecto diz respeito à própria ordenação das matérias. Por exemplo, Sebastião e Silva, no seu *Compêndio de Matemática* introduzia os números complexos da seguinte forma:

Introdução de C

Equações do 3º grau -> Fórmula de Tartaglia -> Necessidade das "quantidades silvestres" de Bombelli r(-A) com A>0 para que a fórmula de Tartaglia forneça todas as raízes reais -> "PROBLEMA. Construir um corpo C que verifique as 3 seguintes condições: (...)" (*Compêndio de Matemática*, 1º vol-2º tomo, p. 136-152, ed. GEP)

Penso que assim os alunos vêem os quês e os porquês do aparecimento da unidade imaginária. Além de que a própria história da fórmula resolvente e o do uso de r(-A) com A>0 está recheada de episódios pitorescos. Num artigo intitulado *The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass*[3] a autora, Judith Grabiner, chama a atenção para o facto de o conceito de derivada ter sido primeiro usado, depois descoberto explorado e desenvolvido e só no fim definido; e interroga-se se o ensino do conceito de derivada não estará errado por começar logo com a definição de derivada. É caso para pensar.

Outra abordagem possível consiste na utilização de pequenos pedaços da História da Matemática na sala de aula.

História na aula de Matemática

Somas de Al-Karagi

Este é um problema interessante que mistura Álgebra e Geometria e mostra como a matemática dos árabes era mais avançada do que normalmente os alunos pensam.

Al-Karagi (ou Al-Karkhi), que viveu nos fins do séc. X, princípios do séc. XI (morreu em 1029), é originário da cidade de Karaj, situada entre Teerão e Kaswin, e é o autor de várias obras muito importantes, como o *Livro suficiente sobre a ciência da aritmética*, *Al-Fakhri*, livro de álgebra, e *Al-Badi*, livro de análise indeterminada.

Al-Karagi foi influenciado por outros autores árabes como Al-Khowarizmi (780-850, de que derivou o nome 'algoritmo') e Abu Kamil (850-930), e pela obra do grego Diofanto traduzida para árabe no séc. X.

Al-Karagi procede à adição dos primeiros n cubos como segue*:

Seja $1+2+...+n$ o lado de um quadrado *[ABCD]*.

Al-Karagi constrói neste quadrado um gnómon $BB'C'D'DC$ (parte sombreada) no qual $\overline{BB'} = \overline{DD'} = n$.

A área do gnómon vale:

$$2n(1+2+...+n) - n^2 = 2n\frac{n(n+1)}{2} - n^2 = n^3.$$

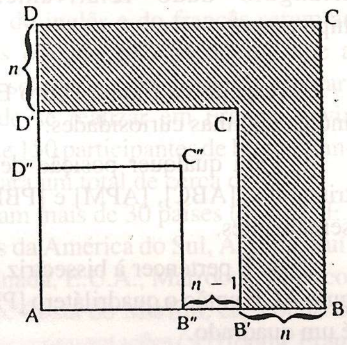
Depois constrói o gnómon seguinte com $\overline{B'B''} = n-1$

A área deste gnómon vale naturalmente $(n-1)^3$.

Prosseguindo deste modo, obtemos no fim o quadrado de lado 1.

A área do quadrado inicial *[ABCD]* é igual à soma das áreas de todos os gnómons e do quadrado de lado 1.

Conclua que igualdade obteve Al-Karagi com este raciocínio.



* Referido em *Routes et dédales*, Amy Dahan-Dalmedico, Jeanne Peiffer, Ed. Études Vivantes, Paris, 1982

Nas caixas encontram-se excertos ou adaptações de vários textos de diferentes épocas que me parece poderem ser utilizados com proveito na sala de aula em alturas variadas (por exemplo, para motivar a introdução de um conceito, para fornecer mais uma perspectiva sobre um conceito, para ajudar a sedimentar um conceito, para servir como aula de exercícios – para não serem só exercícios rotineiros a cumprir esta função). Fazem parte de uma série de textos que tenho usado em sessões com professores e que espero poderem vir a ser editados um dia em forma de livro.

Notas

1. Em "Why study the history of mathematics?", *UMAP* Journal, vol. 1, nº 1, 1980, p. 3-28.
2. Algumas pessoas gostam pouco de coisas menos sérias na sala de aula, mas a verdade é que as anedotas também ajudam a mostrar que os matemáticos são seres humanos como os outros com os seus excessos e as suas fraquezas, contribuindo para desmistificar a ideia de que os matemáticos são 'seres do outro mundo que só fazem contas e têm os cabelos em pé'.
3. Em *Mathematics Magazine*, vol. 56, nº 4, p. 195-206.

Jaime Carvalho e Silva
Universidade de Coimbra

Nota da redacção: Além dos 3 exemplos inseridos neste texto, outros foram enviados pelo autor, intitulados *Pitágoras na China*, *Altura de uma torre*, *Sobre a teoria das paralelas* e *Euler e o crescimento populacional*. Serão incluídos em próximos números da revista.

Matemáticos Portugueses

Pedro Hispano
(1216 - 1277)

Nasceu em Lisboa, filho de Júlio Rabelo, estudou em Paris, foi médico, diplomata, matemático e Papa (o único Papa português - João XXI).

A sua contribuição para a matemática situa-se nos conceitos e leis da lógica, onde se revelou inovador em relação à lógica aristotélica, sendo considerado um precursor da moderna Lógica Matemática.

Escreveu um compêndio escolar *Summulae Logicales*, usado em todos os centros europeus durante mais de três séculos. O valor desta obra, segundo o alemão L. Thomas, resume-se no facto de ela ter sido a "nova lógica", pois surge aí completamente remodelado o *Organon* de Aristóteles.

Entre as valiosas leis da sua "nova lógica" encontram-se as regras do tratamento da conjunção lógica "e" e da disjunção lógica "ou". Segundo o professor italiano Roberto Vacca, as actualmente chamadas "leis de De Morgan (1806 - 1871)" eram já conhecidas do matemático português, razão pela qual o professor italiano Bochenshi, em 1947, propôs para uma dessas leis o nome de "lei de Pedro Hispano".

A morte desta grande figura medieval portuguesa ocorreu em 20 de Maio de 1277, em condições ainda misteriosas, em Viterbo. Pedro Hispano era então Papa havia apenas sete meses.

Compilação de Sérgio Macias Marques