Que concepções epistemológicas da demonstração? Para que aprendizagens?(I)*[1]

Evelyne Barbin

A certeza lógica das provas não ultrapassa a sua certeza geométrica
Wittgenstein, *Remarques sur les fondements des mathématiques*

No ensino francês da Matemática, um lugar importante é dado à demonstração: muitos professores consideram que a demonstração constitui a entrada no mundo da matemática. No entanto, muitos alunos consideram que a demonstração marca o início do seu insucesso na disciplina.

No ensino francês a demonstração é associada à lógica dedutiva. A situação tradicional é então a seguinte: uma demonstração é antes do mais um texto que responde a certas normas, indo das hipóteses às conclusões, enunciando correctamente os teoremas utilizados e usando com conhecimento de causa conjunções gramaticais. Uma demonstração indica o bom caminho, bem diferente do percurso da investigação efectuada, visto que a colocação numa organização dedutiva apaga todos os traços dos questionamentos, das zonas de instabilidade, das tensões que são o prelúdio do desejo e da vontade de demonstrar. Também a demonstração aparece ao aluno, na maior parte das vezes, como um texto formalizado, normalizado e ritual. Trata-se de produzir um texto que não terá forçosamente um sentido para ele.

Recentemente, muitas investigações têm sido lançadas tentando remediar esta situação. Assistimos a uma certa crispação em torno da demonstração, com uma tendência para conceber a aprendizagem da demonstração de forma autónoma em relação à aprendizagem da matemática, à construção de objectos matemáticos e à construção de uma racionalidade matemática. A demonstração pode aparecer assim como uma actividade que não tem sentido em relação ao saber matemático.

Somos nós, sem dúvida, ainda herdeiros do pensamento bourbakista sobre a Matemática. Bourbaki começa os seus *Éléments de Mathématique* com esta afirmação: "depois dos gregos, quem diz Matemática diz demonstração" (Bourbaki, 1960, p. 1), esquecendo que a Matemática é, antes de tudo, um saber. Num artigo recente, Pierre Cartier volta a situar o lugar da demonstração na Matemática, escrevendo: "a Matemática, como toda a ciência, é uma montanha de factos, um saber que se acumula: o papel da prova é organizar o saber e o seu campo de expansão" (1989). Serge Lang, evocando a sua prática de matemático, volta a colocar a Lógica na actividade matemática escrevendo: "Pois bem, é isto fazer Matemática: encontrar problemas interessantes e tentar resolvê-los (...) A Lógica é a higiene da Matemática como a gramática e a sintaxe são a higiene da língua, e nada mais!" (Lang, 1982/1983).

Abordaremos aqui os problemas colocados pelo ensino da demonstração fazendo um certo número de interrogações de natureza epistemológica: Que modo de conhecimento de objectos matemáticos pressupõe a actividade de demonstrar? Que sentido tem demonstrar? Para que concepção do saber remete a necessidade de demonstrar? Para tratar destas questões reportar-nos-emos à História da Geometria, e para melhor precisar a génese e as rupturas, centrar-nos-emos sobre a demonstração do teorema que afirma que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos rectos. Qualquer ensino da demonstração pressupõe certas concepções epistemoló-

* Devido à sua extensão, este artigo será publicado em duas partes, saindo a segunda no próximo número. Ver outras notas no fim do artigo.

gicas, implícitas ou explícitas, que nos parece necessário analisar. É deste ponto de vista que analisaremos seguidamente algumas tentativas em relação ao ensino da demonstração geométrica.

Esta análise não tem como objectivo mostrar como ensinar a demonstração, mas antes estudar um certo número de questões que nos parecem preliminares a uma concepção da aprendizagem da demonstração.

Que modo de conhecimento dos objectos matemáticos pressupõe a actividade de demonstrar?

Há três formas de conceber os objectos matemáticos e o seu modo de conhecimento: uma concepção realista, uma concepção idealista e uma concepção construtivista[2]. Em que é que se distinguem? Como intervem a demonstração e a actividade de demonstrar em cada uma destas diferentes concepções?

Segundo a concepção *realista* descobrimos os objectos matemáticos, os objectos pré-existem no real. Na concepção realista, os objectos matemáticos, abstraídos do real, existem previamente à actividade de demonstrar. A demonstração é então vista como um meio de suprir a insuficiência dos meios de observação ou de instrumentos. Assim a demonstração sobre a soma dos ângulos de um triângulo seguirá as medições com transferidor dos três ângulos de um ou de vários triângulos e ela será legitimada pela imprecisão das medidas.

Segundo a concepção *idealista* inventamos os objectos matemáticos e estes aplicam-se ao real. Na concepção idealista, onde os objectos matemáticos são "livres invenções do espírito humano", a racionalidade matemática e as regras da lógica existem antes da actividade de demonstrar. Segundo esta perspectiva torna-se necessário, antes de qualquer ensino da demonstração, conhecer as regras da lógica — regras estas que se impõem por si mesmas. Consequentemente as demonstrações deverão ser "tiradas" das definições dos objectos e destas regras.

De acordo com a terceira concepção, que qualificarei de *construtivista*, construímos os objectos matemáticos, e estes objectos estruturam o real. Segundo esta concepção, a realidade não é um dado: ela é também construção humana. Construímos uma realidade estruturando o real, isto é, retendo e ligando entre si um certo número de elementos do real. Na concepção construtivista há simultaneidade entre a construção dos objectos matemáticos, a construção de uma racionalidade matemática, e a actividade de demonstrar[3]. Podemos esquematizar esta simultaneidade do seguinte modo:

As duas primeiras concepções, se bem que contraditórias, estão muitas vezes misturadas no espírito do professor: por um lado ele vê a Matemática como uma revelação, "uma passagem do concreto ao abstracto", mas por outro ele também se extasia ao ver "especulações abstractas" aplicarem-se tão miraculosamente ao concreto.

A terceira concepção pode impor-se depois de um estudo histórico dos saberes matemáticos. Para compreender esta aproximação, consideraremos um exemplo histórico, relacionado com a génese do ângulo e dos teoremas relativos a ângulos e triângulos. Com efeito, os jónicos, no séc. VI a.C., sabiam medir a distância a que se encontra da costa um barco no mar. Como podiam eles proceder?[4] Encontramo-nos na situação do cálculo de uma distância inacessível, pois é impossível transportar sobre a água uma vara que servisse de unidade de medida.

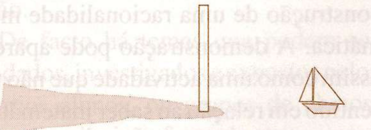

fig. 1

Porém, se subirmos ao cimo de uma torre à beira mar, é possível, com a ajuda de um quadrante, efectuar uma tomada de vista. Um quadrante é constituído por um quarto de círculo e por uma parte móvel que permite fazer uma mirada em direcção ao barco. Em seguida podemos virar-nos para terra e, com a mesma posição da parte móvel, fixar um ponto cuja distância à torre seja de fácil determinação.

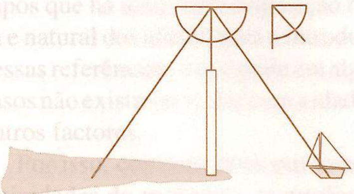

fig. 2

Deste modo justapomos à situação problemática inicial uma figura geométrica (fig. 3). Esta figura serve para representar a situação: os segmentos representam raios visuais (sem espessura) e os ângulos correspondem às diferentes tomadas de vista.

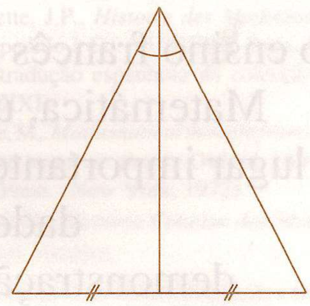

fig. 3

A partir do momento em que concluímos que a igualdade das tomadas de vista implica a igualdade de distâncias, raciocinamos sobre esta figura e enunciamos um teorema relativo à configuração ângulo-triângulo. Utilizamos um processo de pensamento, simultaneamente racional e geométrico, que estrutura o real e que nos permite apropriarmo-nos dele. Temos pois aqui, em simultâneo, a construção de objectos geométricos, a construção de uma racionalidade e a génese de um raciocínio. Objectos, racionalidade e raciocínio tomam sentido numa mesma situação.

A História da Matemática diz-nos que, na mesma época e num mesmo lugar — Grécia Antiga —, nasciam simultaneamente um pensamento racional e geométrico, a exigência de uma ciência demonstrativa e uma concepção ideal dos objectos geométricos[5]. Esta constatação deve ter implicações directas na forma de conceber o ensino da Geometria, onde aí também tudo é para construir: a concepção ideal das figuras, a racionalidade matemática, o raciocínio geométrico. Não há nada preliminar: a pertinência da figura geométrica, o apelo à dedução, a necessidade de demonstrar devem manifestar-se *ao mesmo tempo* a partir de situações problemáticas. Para ter em conta todos estes aspectos, as situações propostas aos alunos devem ser ricas e constituir problemas; não se podem reduzir a tarefas fragmentadas pedidas aos alunos. Voltaremos a este aspecto mais tarde.

Que sentido tem demonstrar?

Para abordar esta questão, compararemos três demonstrações relativas à soma dos ângulos internos de um triângulo: a dos *Elementos* de Euclides (séc. III a.C.), a utilizada por Arnauld nos *Nouveaux Éléments de Géométrie* (1667) e a dos *Éléments de Géométrie* de Clairaut (1765)[6]. Estas demonstrações integram-se em livros onde se pretende ensinar "elementos" de Geometria. As três demonstrações têm a particularidade de assentar sobre o mesmo argumento geométrico, dando simultaneamente à demonstração significados diferentes.

Os *Elementos* de Euclides assentam sobre um "sistema axiomático-dedutivo": cada livro da obra começa por definições e axiomas e continua com proposições. Cada proposição é deduzida a partir dos axiomas e das proposições precedentes. A proposição que nos interessa é a proposição XXXII do Livro I. Euclides define o ângulo rectilíneo como a inclinação entre duas rectas, o que nos remete, sem dúvida, para a génese deste conceito. Contudo esta definição não é operatória: ela permite saber de que objecto se fala, mas não será utilizada nas demonstrações. Assim, para comparar dois ângulos, Euclides não compara inclinações, mas incorpora os ângulos em estudo em triângulos (fig. 4) tais que AB igual a DE e AC igual a DZ, comparando seguidamente BC e EZ.

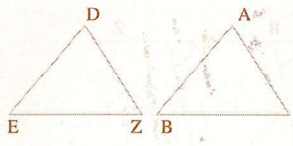

fig. 4

Este procedimento permite-lhe demonstrar na proposição XVI que o ângulo externo dum triângulo é maior que qualquer dos ângulos internos não adjacentes[7] (fig. 5).

Para demonstrar que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois rectos, Euclides tem de mostrar que a justaposição destes três ângulos é igual à justaposição de dois ângulos rectos. A partir da proposição XIX, Euclides utiliza o famoso axioma V das paralelas que lhe permite comparar os ângulos definidos por uma secante a duas rectas paralelas. A demonstração da proposição XXXII consiste em traçar a recta paralela ao lado AB, depois verificar a igualdade dos ângulos BAC e ACE e dos ângulos ABC e ECD, e assim obter uma conclusão (fig 6).

Esta demonstração permite reconhecer o carácter absoluto, universal e necessário da proposição. O leitor não pode senão ficar convencido de que, para qualquer triângulo, a soma dos ângulos é igual a dois ângulos rectos. Com efeito, a força de um raciocínio dedutivo que parte de premissas verdadeiras está no facto de tornar irrefutável a conclusão. Quem lê fica, pois, a saber, mas sem saber como se sabe. De resto, quer aqui quer em todos os *Elementos*, Euclides não indica como descobriu as demonstrações: porquê esta maravilhosa paralela que permite ver e constatar o resultado? O leitor também não sabe porque razão se demonstra a proposição XVI e

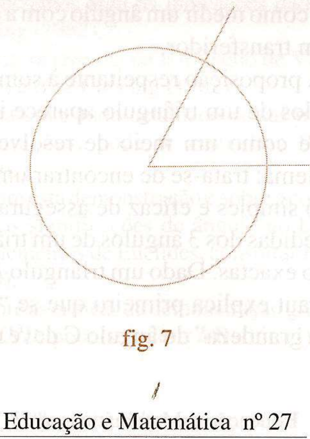

fig. 7

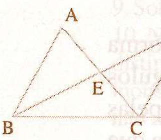

fig. 5

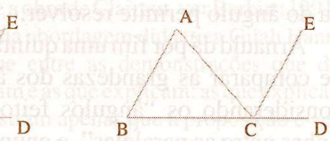

fig. 6

porque esperar ainda dezasseis proposições para ter um resultado completo sobre a soma dos ângulos de um triângulo. Com efeito, a ordem das proposições dos *Elementos* é imposta pelo processo de dedução e não pela ordem da invenção ou pela necessidade de obter resultados.

Esta insatisfação com a leitura de Euclides é expressa no séc. XVII por Arnauld e Nicole que criticam os geómetras antigos por "terem mais preocupação com a certeza do com a evidência, e com o convencimento do espírito do que com o seu esclarecimento" (Arnauld e Nicole, 1965, p. 326). O espírito não se satisfaz sómente com o saber, ele quer também saber como se sabe[8]. Arnauld, com o argumento de que os *Elementos* de Euclides são "confusos e desordenados", escreve em 1667 os *Nouveaux Éléments de Géométrie*, pretendendo assim remediar estes defeitos.

Na obra de Arnauld, a proposição sobre a soma dos ângulos de um triângulo aparece no Livro VIII, consagrado exclusivamente aos ângulos rectilíneos. Arnauld define ângulo como uma "porção de superfície determinada segundo a parte proporcional de uma circunferência cujo centro é o ponto onde estas rectas se encontram" (Arnauld, 1982, p. 142) (fig 7). Em seguida explica ao seu leitor que há quatro maneiras de medir o ângulo: o arco AC, a corda AC, o seno DE, e a base DF (fig 8). Para cada uma destas grandezas indica seguidamente os problemas que esta concepção de medi-

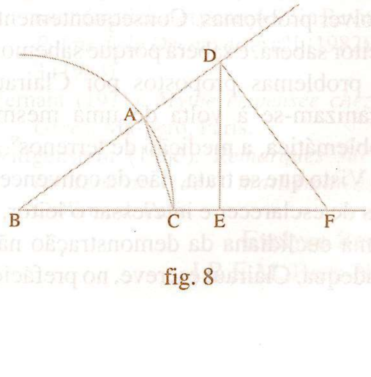

fig. 8

da do ângulo permite resolver.

Arnauld dá por fim uma quinta forma de comparar as grandezas dos ângulos considerando os "ângulos feitos pelas linhas entre as paralelas", e enuncia que toda a oblíqua entre duas paralelas determina ângulos alternos iguais (fig. 9). Esta propriedade permite-lhe demonstrar uma propriedade do ângulo, a saber, "todo o ângulo mais os dois ângulos que têm os lados sobre a base são iguais a dois rectos" (Arnauld, 1982, p. 154). Se BC e BD são lados de um ângulo e CD a sua base, pode-se concluir o resultado traçando MN paralela a CD (fig. 10).

Na obra de Arnauld, o capítulo sobre os ângulos não é um catálogo de proposições, mas antes um método de comparar ângulos e resolver problemas. O leitor poderá saber porque se sabe: será esclarecido. Neste capítulo a ordem das proposições não é regida pela ordem dedutiva, mas pelo alcance dos conhecimentos induzidos por estas proposições. Posto de outro modo, o lugar de cada proposição é determinado segundo a sua pertinência na resolução de um certo tipo de problema. Por exemplo, Arnauld explica que o arco é a única "medida verdadeira e natural" do ângulo e a base a "medida mais imperfeita". De facto, a trissecção do ângulo implica uma trissecção do arco e não uma trissecção da base.

A vontade de esclarecer o leitor anima do mesmo modo Clairaut quando escreve, cerca de um século mais tarde, os seus *Élements de Géométrie*. Efectivamente, Clairault especifica no prefácio da sua obra que pretendeu escrever um tratado que "reunisse as duas vantagens, de interessar e de esclarecer" o seu leitor. Com este fim, concebe uma geometria problematizada, isto é, uma geometria na qual os conceitos e os saberes têm sentido porque são instrumentos para resolver problemas. Consequentemente o leitor saberá, e saberá porque sabemos. Os problemas propostos por Clairaut organizam-se à volta de uma mesma problemática, a medição de terrenos[9].

Visto que se trata, não de convencer, mas de esclarecer e interessar o leitor, a forma euclidiana da demonstração não se adequa. Clairaut escreve, no prefácio,

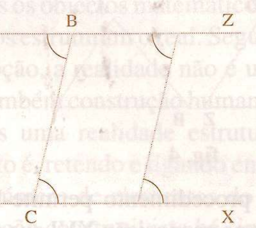

fig. 9

que "evita cuidadosamente dar qualquer proposição sob a forma de teoremas, onde se demonstra que esta ou aquela verdade se verifica, sem mostrar como se conseguiu descobri-la". Prossegue explicando que "se os primeiros autores de matemática apresentaram as suas descobertas em teoremas foi, sem dúvida, para dar um ar mais maravilhoso às suas produções, ou para evitar a dificuldade em retomar a sequência das ideias que os conduziram às suas descobertas". Clairaut, pelo contrário, quer ocupar os leitores a resolver problemas, porque assim estes "se apercebem a cada passo que o levamos a fazer, a razão que determina o inventor; e por aí eles podem adquirir mais facilmente o espírito inventivo". A ordem que preside à sua obra é a ordem das invenções.

Clairaut só introduz os conceitos e as proposições à medida que se tornam necessários para resolver problemas. Assim, o conceito de ângulo é introduzido numa situação em que só se podem medir dois lados de um triângulo: trata-se pois de um problema que visa determinar uma distância inacessível. Clairault explica que é necessário construir um triângulo semelhante, utilizando a forma como um dos dois lados medidos "tomba" sobre o outro. O ângulo é então definido como a inclinação de uma linha sobre outra. Seguidamente Clairault explica como medir um ângulo com a ajuda de um transferidor.

A proposição respeitante à soma dos ângulos de um triângulo aparece igualmente como um meio de resolver um problema: trata-se de encontrar um processo simples e eficaz de assegurar que as medidas dos 3 ângulos de um triângulo são exactas. Dado um triângulo ABC, Clairaut explica primeiro que se "sente que a grandeza" do ângulo C deve resul-

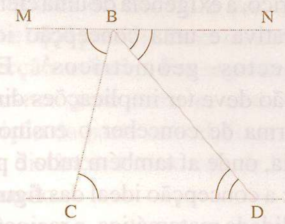

fig. 10

tar das dos ângulos A e B, pois assim que alterarmos estas, as rectas AC e BC alteram-se e o ângulo C também. Para achar como se pode concluir a grandeza do ângulo C a partir das dos ângulos A e B, Clairaut supõe que BC gira em torno do ponto B para a recta BE (fig. 11).

Ele escreve então: "é evidente que ao mesmo tempo que BC gira, o ângulo B se abre continuamente; e que, pelo contrário, o ângulo C se fecha cada vez mais; o que poderia fazer pensar que, neste caso, a diminuição do ângulo C igualaria o aumento do ângulo B e que assim a soma dos três ângulos A, B, C seria sempre a mesma seja qual for a inclinação das linhas AC e BC sobre a linhas AE".

Assim que a recta BC chega à posição limite onde se torna paralela a AC, este resultado pode ser demonstrado: Clairaut escreve que "esta indução pressuposta traz com ela a sua própria demonstração" e traça a recta ID paralela a AC (fig. 12).

Deste modo, Clairault ensina-nos como o geómetra tem a ideia de construir esta paralela ao lado AC, ideia-chave que permite demonstrar a proposição.

Assim, para Clairaut, demonstrar é também saber porquê e saber como se sabe — isto é, que o saber implica o processo pelo qual se sabe. Porque é que um conhecimento se torna objecto de pesquisa do geómetra? Como é que o geómetra chega à verdade? Como é que o geómetra inventa o seu saber? Portanto, porquê e como o geómetra sabe que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois rectos? Para Clairault, o saber do geómetra é um meio de resolver problemas: o seu leitor aprende, pois, qual o problema que o leva a interrogar-se sobre a soma dos ângulos de um triângulo (o porquê), e que investigações o conduzem a construir a paralela a um dos lados

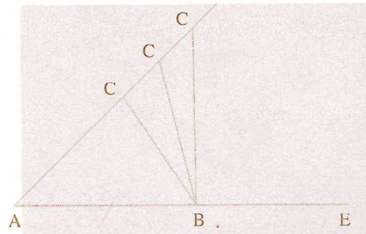

fig. 11

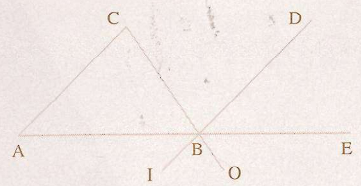

fig. 12

do triângulo (o como). O leitor pode apropriar-se do saber: ele está esclarecido e interessado.

Utilizando os termos históricos, diremos que a actividade de demonstrar pode ter três significados, que correspondem a exigências diferentes: as de *convencer* para saber, *esclarecer* para saber como se sabe e *interessar* para saber porque se sabe[10]. Estas exigências correspondem a concepções diferentes do saber e podemos, pois, alargar a questão do sentido da actividade de demonstrar à do sentido do saber.

A que concepções do saber remete a necessidade de demonstrar?

Referimos que Arnauld e Clairaut fazem um certo número de críticas aos *Elementos* de Euclides. Estas críticas correspondem a uma nova concepção do saber, que tem origem nas práticas matemáticas dos geómetras do séc. XVII. Estes geómetras vêem nos escritos de Euclides ou de Arquimedes um saber condensado, um saber que suscita o consentimento, mas um saber que não permite inventar. Eles vão sobretudo levar a peito a produção de métodos que lhes permitam resolver problemas — método cartesiano, método dos indivisíveis, método das tangentes, métodos projectivos, de forma a responder à sua sede de inventar. Assim *La Géométrie* de Descartes de 1637, não é um catálogo de proposições geométricas mas um método para resolver problemas geométricos transformando-os na resolução de equações algébricas.

Podemos ver aqui uma ruptura entre um saber concebido como um *produto* que se inscreve num discurso constituído e que tem coerência neste discurso, e um saber concebido como um *processo*, que é construído a partir de problemas e que toma sentido nas práticas[11].

De acordo com a segunda concepção, uma demonstração não é sómente um texto mas o conjunto do processo que transforma uma questão num objecto de investigação, que leva a definir ou a modificar conceitos e que conduz à resolução de um problema: "uma demonstração matemática é a análise da proposição matemática" (Wittgenstein, citado por Bouveresse, 1988, p. 61). Esta última observação tem implicações didácticas sobre as quais voltaremos na segunda parte deste artigo, interrogando-nos sobre as concepções epistemológicas subjacentes ao ensino da demonstração.

Notas

1. Este artigo retoma o texto de uma conferência publicada em Rosmorduc (Ed.) (1991) *Actes des Journées Paul Langevin,* Universidade de Brest, sob o título *La démonstration mathématique: Histoire, epistémologie et enseignement.* Agradeço a Rudolf Bkouche, Christine Docq, Jean-Claude Duperret, Jean Houdebine, Marc Legrand e Nicolas Rouche os seus comentários e críticas que me permitiram precisar, modificar e rectificar o texto inicial.
2. Para os termos *realista* e *idealista*, adoptaremos a terminologia de Bouveresse (1988, p. 23).
3. Poderemos encontrar exemplos históricos desta simultaneidade em Barbin (1989). Ler, em particular, o artigo de Bkouche (1989).
4. Utilizamos aqui as indicações dadas em Caveing (1982).
5. Pode-se referenciar o trabalho de Vernant (1971) e o de Caveing (1982).
6. Para um estudo detalhado destas três demonstrações, pode-se consultar Barbin (1989).
7. Sobre esta demonstração e sobre a construção das significações do ângulo no Livro I dos Elementos de Euclides, consultar Barbin (1988).
8. Sobre as críticas da demonstração grega no séc. XVII, pode-se referir a Barbin (1988).
9. Sobre a obra de Clairaut, ver Barbin (1991).
10. Numa abordagem didáctica Gilah Hanna distingue entre as demonstrações que demonstram e as que explicam: as que explicam não mostram apenas que a proposição é verdadeira, mas também porque ela é verdadeira, e elas devem ser preferidas no ensino (Hanna, 1989).
11. Sobre a pertinência desta distinção na formação, consultar Charlot (1990).

Referências bibliográficas

Arnauld (1982). *Nouveaux éléments de géométrie*, reedição I.R.E.M. de Dijon.

Arnauld et Nicole (1965). *La logique ou l'art de penser*, P.U.F.,Paris.

Barbin, Evelyne (1988). *La démonstration mathématique: signification épistémologiques et questions didactiques*, Bulletin A.P.M.E.P. nº 366.

Barbin, Evelyne (1989). Trois démonstrations d'un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et object de la géométrie in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, I.R.E.M. de Lyon.

Barbin, Evelyne (1991). Les *Eléments de géométrie* de Clairaut: une géométrie problématisée, *Repères I.R.E.M.*, nº 4.

Bkouche, R. (1989). Quelques remarques sur la démonstration, in Comission inter-IREM Epistémologie, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, I.R.E.M. de Lyon.

Bourbaki, N. (1960), Eléments de mathématique, Théorie des ensembles, 2ª ed., Herman, Paris.

Cartier, P. (1989). La vérification des démonstrations mathématiques, in *Pour la science*, nº146.

Caveing, M. (1982). *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, Université de Lille III.

Charlot, B. (1990). Enseigner-former: Logique des discours constitués et logique des pratiques, *I.N.R.P. Recherche-Formation*, nº 8.

Clairaut (1986). *Eléments de géométrie*, reedição Siloë, Laval.

Hanna, Gilah (1989). Proofs that Prove and Proofs that Explain, in *Actes de la 13ème Conférence PME*, Paris.

Lang, Serge (1982,1983). Que fait un mathématicien et pourquoi? in Revue du *Palais de la Découverte*, nº1 (1982) e nº 3 (1983).

Vernant (1971). *Mythe et pensée chez les Grecs*, Maspero, Paris.

Wittgenstein (1983). *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Gallimard, Paris.

Evelyne Barbin
I.R.E.M. Paris-Nord