Tudo o que há num cubo...

Eduardo Veloso

A geometria ocupa de novo um lugar de relevo nos programas de Matemática. No entanto, se bem compreendo o que os autores do programa pretendem, não se trata de um regresso ao passado, à interminável lista de postulados, teoremas, lemas, corolários e escólios com que se pretendia, desastradamente, levar os alunos a penetrar nas belezas do raciocínio dedutivo! Em lugar disso, outros modos de abordar o ensino da geometria têm sido propostos, dando um papel preponderante, por exemplo, às actividades de visualização e às conexões da geometria com outros temas da Matemática.

A geometria no espaço tridimensional deverá também ser privilegiada, com a inclusão de propostas envolvendo a utilização de materiais manipuláveis, a planificação e a construção de modelos, e a compreensão e aprendizagem das representações no plano de objectos a três dimensões.

Um dos sólidos mais simples e mais conhecido, supostamente, é o cubo, o qual pode constituir um ponto de partida excelente para explorações interessantes, pondo em jogo diversas actividades dos tipos que acabámos de referir. Neste artigo serão apresentadas algumas propostas de trabalho para alunos de diversos níveis de escolaridade. A primeira fez parte do currículo experimental do projecto MAT_{789}.

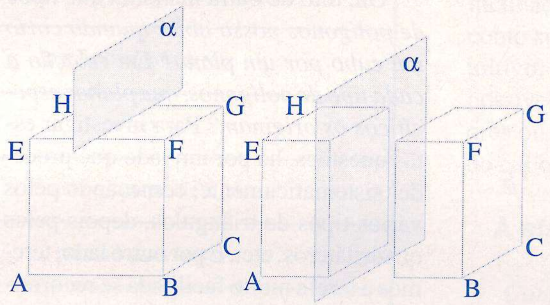


figura 1

Pedro, aluno do 7º ano do currículo experimental MAT_{789}, dizia que o que gostava na geometria era "ver tudo o que há num sólido". Referia-se assim às explorações que tinha feito com cubos, tetraedros e outros poliedros. Será que já vimos *tudo o que há num cubo*?

Cortar um cubo ao meio

De quantas maneiras diferentes se pode cortar, com um plano, um cubo ao meio? O mais interessante nesta actividade é talvez a forma *nebulosa* como ela está enunciada e daí as estimulantes discussões a que dá lugar... O que é *cortar ao meio*? A princípio podemos ser levados a considerar que "ao meio" significa em duas partes simétricas, como por exemplo no caso dos planos α (fig. 1) e β (fig. 2). Mas, reflectindo um pouco, podemos pensar que ao meio significa "em duas partes iguais" e então o plano γ também serve (fig. 3). E o que são *maneiras diferentes*? No primeiro significado de "cortar ao meio", poderíamos

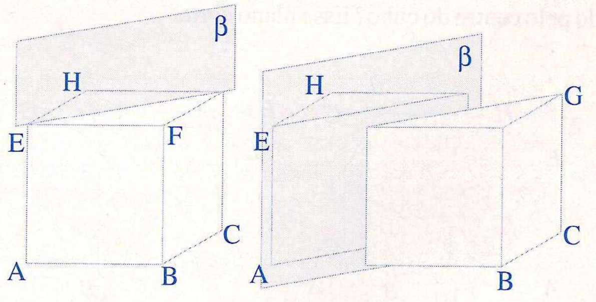


figura 2

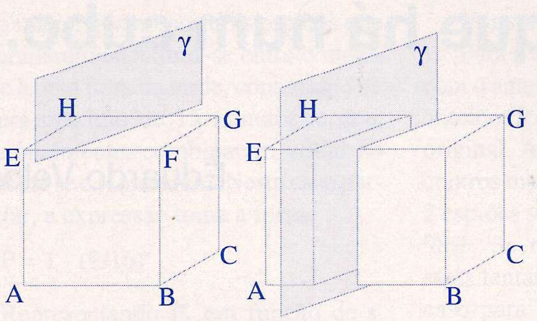


figura 3

considerar que haveria três modos diferentes com planos tipo α (correspondentes às faces *EFGH*, *FBCG* e *ABFE*) e seis modos diferentes com planos tipo β (correspondendo aos seis pares possí-

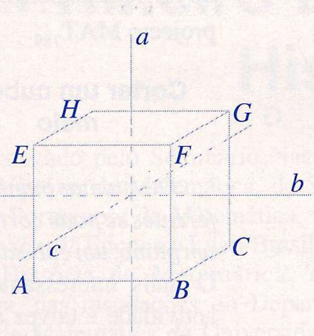


figura 4

veis de arestas opostas). Mas, se γ também corta ao meio, então começamos talvez a pensar que os planos α, β e γ são afinal do mesmo tipo... contêm todos a recta *a*, perpendicular à face *EFGH* e passando pelo seu centro (ver fig. 4). E assim haveria três tipos de cortes, correspondendo respectivamente a planos contendo as rectas *a*, *b* e *c*. Mas que dizer de um plano perpendicular à diagonal espacial do cubo, *FD*, e passando pelo centro do cubo? Esse plano corta

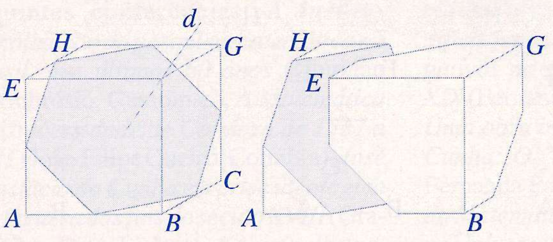


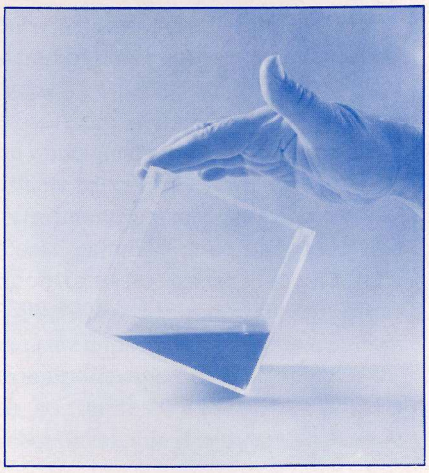
figura 5

o cubo segundo um hexágono regular (visível na capa desta revista) e divide-o em duas partes geometricamente iguais (ver fig. 5). E não é de nenhum dos tipos anteriores! E não acontecerá o mesmo — divisão do cubo em duas partes geometricamente iguais — para todo o plano passando pelo centro do cubo? Decididamente, esta exploração não vai acabar mais...

Que polígonos *há* num cubo?

Ou, dito de outra maneira: *que tipos de polígonos posso obter quando corto um cubo por um plano? Em relação a cada tipo de polígonos, que planos específicos os originam?* Para investigar estas questões, há por um lado que proceder sistematicamente, começando pelos vários tipos de triângulos, depois pelos quadriláteros, etc.. E por outro lado, teremos a tarefa muito facilitada se recorrermos a algum tipo de material manipulável. Um "esqueleto de cubo" (cubo formado pelas arestas), como diziam os alunos do MAT_{789}, e elásticos de cor ou uma simples linha de coser são suficientes. Um material interessante mas um pouco mais caro consiste em cubos com as faces em acrílico e um dos cantos cortado. Este canto destina-se a permitir encher parcialmente o cubo com um líquido colorido, de modo a que a sua superfície defina, conforme a posição do cubo em relação ao plano horizontal, os vários tipos de polígonos de corte (ver capa desta revista). O líquido pode ser simplesmente água colorida com uma pequena diluição de Écoline, uma aguarela líquida que se vende nas lojas de produtos para belas artes[1].

A tabela da página seguinte apresenta alguns resultados desta investigação.



Margarida Dias

Quando o plano de corte é paralelo a uma aresta, como neste caso, a secção é um rectângulo. Como se indica no texto, para certos volumes de líquido e certas inclinações do cubo, a secção é exactamente um quadrado.

Como podem chegar os alunos (e nós) a estes resultados? Manipulando, visualizando, conjecturando, argumentando, inventando contra-exemplos, recorrendo à intuição espacial. Quanto a demonstrações, deve dizer-se que provar, com um mínimo de rigor, muitos destes resultados, não é tarefa fácil. Podem-se dar algumas justificações parciais, apoiadas sobretudo na intuição, e isso já é importante. Mas a demonstração completa de muitos deles exige algumas horas e várias páginas escritas. Por isso é tarefa que está para além do que se pretende dos alunos em geometria, mesmo no ensino secundário.

Investiguemos em particular o caso interessante dos cortes que dão quadrados. Um caso evidente é o dos planos paralelos a uma face — se deitarmos um pouco de líquido no cubo, e assentarmos uma sua face sobre uma mesa horizontal, logo vemos surgir um quadrado. Mas existem outros planos que também dão quadrados. Para o reconhecermos, deitemos um pouco de líquido, não muito, no cubo, e assentemos uma das arestas na mesa horizontal. Inclinando o cubo para um ou outro lado, sempre com a aresta sobre a mesa, conseguimos *em geral* obter um quadrado, com uma inclinação conveniente. Digo em geral porque isso

Polígonos que resultam de cortes planos num cubo

polígonos	propriedades dos planos
triângulos	cortando apenas três faces do cubo
triângulos equiláteros	perpendiculares a uma diagonal espacial do cubo
triângulos isósceles	paralelos a uma diagonal facial do cubo
triângulos escalenos	nem perpendiculares a qualquer diagonal espacial nem a qualquer diagonal facial
quadriláteros	cortando exactamente quatro faces
trapézios isósceles	paralelos a uma diagonal facial
trapézios rectângulos	não existem, a não ser dando rectângulos
paralelogramos	cortando dois pares de faces opostas
rectângulos	paralelos a uma aresta
quadrados	ver texto
pentágonos	cortando exactamente 5 faces
hexágonos	cortando seis faces
hexágonos regulares	perpendiculares a uma diagonal espacial, cortando as arestas nos pontos médios

só é possível para certas quantidades de líquido, e não para outras!

Observe-se a fig. 6, em que se representa a face *ABCD* de frente, com a aresta *CG* apoiada na mesa, e com diferentes quantidades de líquido. O ângulo ϕ define a posição do cubo em relação à mesa horizontal. É intuitivo que a superfície do líquido, nestas condições, é sempre um rectângulo. Um dos lados do rectângulo é igual à aresta l do cubo, seja qual for a quantidade de líquido. O outro, representado pelo segmento *PQ*, é inferior a l para pequenas quantidades de líquido (fig. 6A), mas quando essa quantidade aumenta suficientemente, é superior a l (fig. 6C). Então, numa posição intermédia (fig. 6B), obteremos um quadrado. O volume de líquido para obter um quadrado é função do ângulo ϕ, quando este varia no intervalo $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$. Notando que o ângulo $QPC = \phi - \frac{\pi}{4}$ e que o volume v do líquido é o de um prisma recto de base triangular *PQC* e altura igual a l, teremos $v = \frac{l^3}{2} cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right).sen\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)$, para $\phi \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

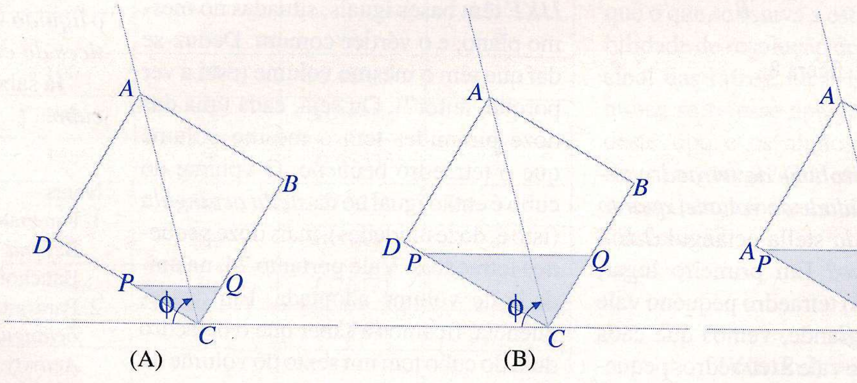


figura 6

O volume máximo obtém-se quando $\phi = \frac{\pi}{2}$, ou seja quando as arestas *CG* e *AE* estão no mesmo plano vertical. O volume de líquido nesse caso será igual a $\frac{l^3}{4}$. Vemos assim que para um volume de líquido inferior a um quarto do volume do cubo podemos obter, com uma aresta assente na mesa horizontal e uma inclinação conveniente, um quadrado como superfície do líquido. Como é intuitivo, também o mesmo resultado é possível com volumes de líquido superiores ou iguais a três quartos do volume do cubo.

A *stella octangula*[2] de Kepler

Como poderemos inscrever um tetraedro regular num cubo? "Inscrever" significa aqui que os 4 vértices do tetraedro coincidirão com vértices do cubo. Na fig. 7 os vértices *A*, *C*, *H* e *F* definem um tetraedro regular, representado a sombreado. Dos oito vértices do cuba sobram quatro, com os quais podemos formar outro tetraedro regular igual ao primeiro, e que o cruza. O conjunto dos dois tetraedros foi estudado pelo frade e matemático Luca Pacioli, autor de uma célebre álgebra (a primeira impressa) do início do Renascimento, a *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni e proportionalita*, publicada em 1487. Ao par de tetraedros deu Pacioli o nome de *octaedrum elevatum*, por razões que veremos em breve. Um século

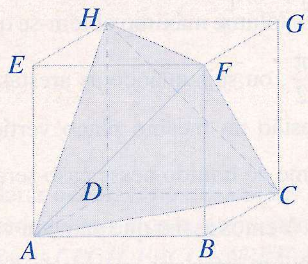


figura 7

mais tarde, Kepler também estudou o conjunto dos dois tetraedros, agora com o nome de *stella octangula*. Na fig. 8 está representada a *stella octangula*. É relativamente fácil ver (quer o leitor tentar?) que cada uma das pequenas pirâmides triangulares, de que *IJKF* é um exemplo, é também um tetraedro regular, cuja aresta tem por comprimento metade da diagonal da face do cubo. Referiremos o teraedro *IJKF* como tetraedro pequeno, e o tetraedro inscrito no cubo como tetraedro grande, no que se segue.

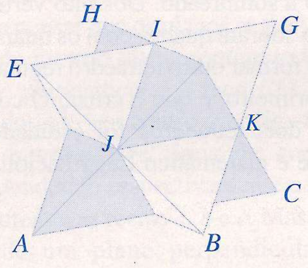


figura 8

Tomando o volume do tetraedro pequeno como unidade de volume, quanto vale o volume da stella octangula? *E o volume do cubo*? Em primeiro lugar, como a aresta do tetraedro pequeno vale metade da do grande, vemos que cada tetraedro grande vale 8 tetraedros pequenos (dois tetraedros regulares são sempre semelhantes...). Podemos também ver que a intersecção dos dois tetraedros grandes é um octaedro, pois é claramente um sólido com oito faces triângulos equiláteros. De resto, não é mais do que o poliedro dual do cubo, cujas arestas se obtêm unindo por segmentos os centros das faces do cubo (ver fig. 9). Portanto, um tetraedro grande é formado por um octaedro e por quatro tetraedros pequenos. Como o volume do tetraedro grande vale oito pequenos, concluímos que o octaedro vale quatro tetraedros pequenos. Mas, por outro lado, a *stella octangula* pode considerar-se um octaedro a que se colaram oito pequenos tetraedros, um em cada face (daí o nome de *octaedrum elevatum*, de Pacioli). Assim, o volume da *stella* vale 4+8=12 tetraedros pequenos.

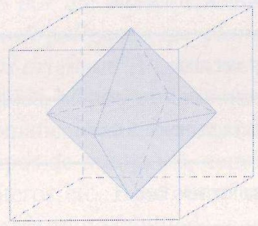
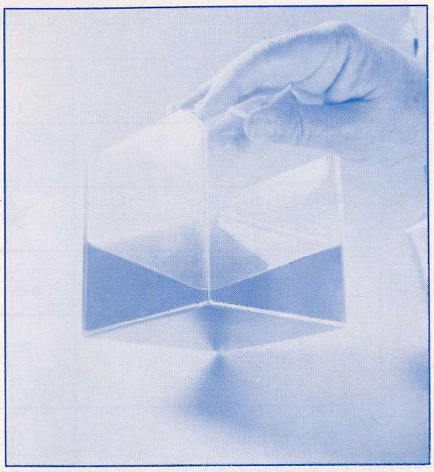


figura 9

Quanto ao cubo, se pensarmos na *stella octangula* nele inscrita, vemos que o espaço do cubo não ocupado pela *stella* é formado por 12 pirâmides — uma por cada aresta do cubo. Uma dessas pirâmides tem por base o triângulo *EIJ* e por vértice o ponto *F*. Note-se que o triângulo *EIJ* é igual ao triângulo *IJK* e está no mesmo plano. Então as pirâmides *EIJF* e *IJKF* têm bases iguais, situadas no mesmo plano, e o vértice comum. Deduz-se daí que têm o mesmo volume (está a ver porquê, leitor?). Ou seja, cada uma das doze pirâmides tem o mesmo volume que o tetraedro pequeno. O volume do cubo é então igual ao da *stella octangula* (isto é, doze unidades), mais doze pequenos tetraedros. Vale portanto 24, na unidade de volume adoptada. Em consequência, ficamos a saber que o octaedro dual do cubo tem um sexto do volume do cubo.



Margarida Dias

Em que condições se obtém um losango, num corte plano de um cubo? O plano tem que cortar, está claro, quatro faces. Tem que cortar duas arestas opostas. E, finalmente, tem que ser paralelo a uma diagonal facial. Este caso não está considerado na tabela de resultados.

Possíveis extensões

Coloquemos o cubo na posição indicada na fig. 6, com $\phi = \pi/2$. Se enchermos a pouco e pouco o cubo com líquido, e designarmos por *h* a altura da sua superfície em relação ao tampo da mesa, como são os gráficos das funções que exprimem:

- *a área da superfície do líquido em função de* h?
- *o volume de líquido em função de* h?

Coloquemos agora o cubo assente sobre um dos vértices e com a respectiva diagonal espacial vertical. Como é o

- *gráfico da função que exprime o perímetro do polígono formado pela superfície do líquido, em função de* h?

Relativamente a esta última posição do cubo, *quais são os volumes de líquido que correspondem aos momentos em que o líquido vai atingindo os diferentes vértices do cubo*?

Já saberemos agora *tudo o que há no cubo...*?

Eduardo Veloso

Notas:

1. Um material deste tipo é sugerido no livro *Beyond the Third Dimension*, de Thomas Banchoff, Ed. Scientific American Library.
2. Para outras actividades envolvendo a *stella octangula*, consultar *The Stella Octangula Activity Book*, da *Key Curriculum Press/ Visual Geometry Project*.