Este vértice é o ponto de intersecção das rectas **r** e **b**.

A recta **r** tem declive igual a - tg α.

Como **p** é perpendicular a **r**, o ângulo [SAP] mede 90 - α. Como o triângulo [SAP] é isósceles, a recta **a** tem declive - tg(90 - α) ou - cotg α. A recta **b** é paralela a esta, logo tem o mesmo declive.

Obtemos então o sistema:

Recta **r** $\quad y = -\operatorname{tg}\alpha \cdot x + 10\operatorname{tg}\alpha$

Recta **b** $\quad y = -\operatorname{cotg}\alpha \cdot x + 20\operatorname{cotg}\alpha$

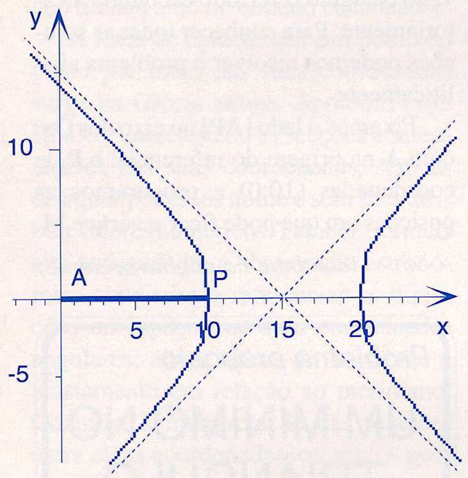
Eliminando α chegamos à equação

$$y^2 = x^2 - 30x + 200$$

que é o lugar geométrico dos pontos onde se pode situar o vértice **M**.

Esta curva é uma hipérbole de focos em $(15+\sqrt{50}\ ;0)$ e $(15-\sqrt{50}\ ;0)$ e em que as assímptotas são as rectas

$$y = x - 15 \quad e \quad y = -x + 15.$$



Pela análise da figura verificamos que, se **M** estiver no ramo do lado esquerdo da hipérbole, o ângulo α pode variar entre 45° e 90° (exclusivé). Se **M** estiver no ramo do lado direito, α pode variar entre 135° e 180° (exclusivé).

Alberto Canelas faz notar que o único triângulo isósceles solução do problema é um triângulo equilátero.

Há também um triângulo rectângulo nas condições do problema. Os seus lados medem 10, $10\sqrt{2}$ e $10\sqrt{3}$.

José Paulo Viana

Esc. Sec. de Carnide

Os espiões da Praça Vermelha

Alberto Canelas

De vez em quando aparecem problemas a partir dos quais se pode partir para novas aventuras.

É o que se passa com o "Encontro na Praça Vermelha", que permite fazer uma série de interessantes prolongamentos, variantes e generalizações.

No número 24 de *Educação e Matemática* foi proposto o problema "Encontro na Praça Vermelha":

Dois agentes secretos têm um encontro marcado para um certo dia de Outubro na Praça Vermelha. Com receio de uma possível actuação da contra espionagem, tomaram as seguintes medidas de precaução:

- *Cada um deles chega à praça num momento escolhido ao acaso entre o meio-dia e a uma hora da tarde.*
- *Nenhum deles espera mais de 15 minutos pelo outro.*

Qual é a probabilidade de o encontro realmente se efectuar?

A resolução deste problema foi publicada no número 25 desta revista. Apesar destes encontros de agentes secretos na Praça Vermelha estarem a ficar um pouco fora de moda, vale a pena fazer algumas generalizações e referir outros casos que se considere de interesse.

1º - Probabilidade de dois espiões A e B se encontrarem, no intervalo de tempo de 1 hora, sabendo que A e B esperam um pelo outro k horas, com $k \leq 1$.

A probabilidade do encontro se verificar é dada por

$$P=\int_0^k (t+k)dt+\int_k^{1-k} 2k\,dt+$$
$$+\int_{1-k}^1 (1-t+k)dt$$

Efectuando os cálculos chegamos à expressão

$$P = 2k - k^2$$

Substituindo k por 1/4, obtemos o valor7/16, solução do problema inicial.

Podemos fazer uma tabela para alguns valores de k.

k(h)	**P**	**k(h)**	**P**
0	0	0,6	0,84
0,1	0,19	0,7	0,91
0,2	0,36	0,8	0,95
0,3	0,51	0,9	0,99
0,4	0,64	1	1
0,5	0,75		

Como seria de esperar, a probabilidade tende para 1 quando k tende para 1. De notar, que quando o intervalo de tempo de espera é de 0,9 h (54 minutos) já existe uma probabilidade de 99% de os espiões se encontrarem.

2º - Probabilidade de dois espiões A e B se encontrarem no decorrer de 1 hora, sabendo que A e B esperam um pelo outro durante intervalos de tempo de k e m horas, respectivamente, com $k,m \leq 1$.

A probabilidade do encontro se verificar é dada por

$$P=\int_0^m (t+k)dt+\int_m^{1-k} (m+k)dt+$$
$$+\int_{1-k}^1 (1-t+m)dt$$

Efectuando os cálculos chegamos à expressão

$$P = k + m - \frac{k^2+m^2}{2}$$

Podemos calcular alguns valores dando as probabilidades de encontro de dois espiões que esperam k e m horas, obtendo a tabela ao lado.

Note-se que, fazendo k=m nesta expressão, obtemos a do 1º caso.

Como se pode observar, mesmo que um dos espiões seja extremamente impaciente, isto é, não espere pelo outro, existe sempre probabilidade de se encontrarem desde que o outro espião seja um bocadinho menos impaciente. Por exemplo, quando B não espera por ninguém mas A espera 0,4 h (24 minutos), a probabilidade de se encontrarem é de 32%.

		k					
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
	0	0,00	0,18	0,32	0,42	0,48	0,50
	0,2	0,18	0,36	0,50	0,60	0,66	0,68
m	0,4	0,32	0,50	0,64	0,74	0,80	0,82
	0,6	0,42	0,60	0,74	0,84	0,90	0,92
	0,8	0,48	0,66	0,80	0,90	0,96	0,98
	1	0,50	0,68	0,82	0,92	0,98	1,00

3º - Probabilidade de dois espiões se encontrarem no decorrer de um intervalo de tempo de n horas, sabendo que cada um espera pelo outro k e m horas, respectivamente, com k, m ≤ n.

O raciocínio é idêntico ao do caso anterior e a fórmula a aplicar é a mesma desde que se substitua k e m por k/n e m/n, respectivamente. Isto é, nas condições do problema, o intervalo [0;n], com tempos de espera k e m, é equivalente ao intervalo [0;1] com tempos de espera k/m e m/n. A fórmula obtida será

$$P = \frac{k+m}{n} - \frac{k^2+m^2}{2n^2}$$

Claro que fazendo n = 1 vamos obter a expressão do 2º caso.

4º - Probabilidade de r espiões se encontrarem no decorrer de um intervalo de tempo de n horas, sabendo que cada um espera k horas pelos outros, com k ≤ n (para não complicar mais, não estudamos o caso em que os tempos de espera são diferentes).

Vamos considerar primeiro o caso em que o intervalo de tempo durante o qual o encontro se pode dar é de 1 hora. Seguindo o mesmo tipo de raciocínio do 1º caso, podemos escrever:

$$P=\int_0^k (t+k)^{r-1}dt+\int_k^{1-k}(2k)^{r-1}dt+$$
$$+\int_{1-k}^{1}(1-t+k)^{r-1}dt$$

Efectuando os cálculos e generalizando para o caso em que o intervalo de tempo tem a dimensão n, tal como fizemos no 3º caso, isto é, substituindo k por k/n e m por m/n, chegamos finalmente à expressão:

$$P=\frac{2k^r}{m^r}(2^r-1)+\frac{2^{r-1}k^{r-1}}{n^{r-1}}\left(1-\frac{2k}{n}\right)$$

Se, na expressão anterior, substituirmos r por 2 (apenas dois espiões) e n por 1 (intervalo de uma hora para o encontro), vamos obter $P = 2k - k^2$, que é a expressão que encontrámos no 1º caso.

Vou tecer alguns comentários acerca da expressão obtida para este caso:

a) Quaisquer que sejam os valores de k e n (desde que n ≠ 0), a fórmula conduz a P=1 se r=1. Isto quer dizer que, se houver um só espião, ele se encontra sempre consigo próprio qualquer que seja o seu tempo de espera (inclusive um tempo de espera nulo), o que está de acordo com o esperado!

b) Vamos também examinar um caso semelhante ao do enunciado original do problema, mas com a diferença de, em vez de dois, existirem r espiões. Isto é, vou aplicar a fórmula anterior para o caso de n=1 e k=0,25, o que conduz à expressão:

$$P=\frac{1}{2^{r-1}r}\left(1-\frac{1}{2^r}+\frac{r}{2}\right)$$

Fazendo os cálculos para os possíveis valores de r, obtemos a tabela:

Espiões (r)	Probabilidade
1	1,000
2	0,438
3	0,198
4	0,092
5	0,043
6	0,021
7	0,010

Como se pode observar, a probabilidade de haver encontro diminui à medida que aumenta o número de espiões. Para o caso que estamos a estudar, podemos confirmar que para r=1 vem P=1 e para r=2 vem P=0,438 que é a solução do problema original. No caso de termos 7 espiões, a probabilidade de todos se encontrarem é de apenas 1%. Se os espiões fossem 20, a probabilidade desceria para 0,002%.

5º - Probabilidade dos espiões se encontrarem em qualquer dos casos anteriores, mas em que o número de dias s para o possível encontro é variável.

Por outras palavras, vamos considerar o caso em que os espiões fazem o seguinte acordo: se não nos encontrarmos no primeiro dia, durante o intervalo de tempo previsto e esperando o tempo combinado, voltaremos no dia seguinte nas mesmas condições, e assim sucessivamente até se efectuar o encontro.

Se representarmos por P a probabilidade de o encontro se efectuar no primeiro dia, 1 - P representa a probabilidade de o encontro não se efectuar nesse dia. A probabilidade de o encontro não se efectuar nem no primeiro nem no segundo dia será (1 - P)(1 - P). Ao fim de s dias, a probabilidade de o encontro não se ter ainda verificado é dada por $(1 - P)^s$. Logo a probabilidade de o encontro se efectuar até ao s-ésimo dia será dada por:

$$P_s = 1-(1-P)^s$$

Vou tecer alguns comentários acerca desta expressão.

a) Quaisquer que sejam os valores de P, a expressão conduz a $P_s = 0$ se s = 0. Isto apenas quer dizer que, se os espiões não comparecerem a nenhum encontro de certeza que não se encontram, o que está de acordo com o esperado!

b) Quaisquer que sejam os valores de P (desde que P ≠ 0), o lim $P_s = 1$ quando s tende para infinito. Por outras palavras, por mais pequena que seja a probabilidade de encontro (mas ≠ 0), o encontro acabará por se efectuar desde que o número de tentativas de encontro seja suficientemente grande, o que também está de acordo com o esperado!

c) Consideremos em terceiro lugar o

caso inicial dos nossos dois espiões que combinaram encontrar-se entre o meio-dia e a uma hora da tarde, com tempo de espera máximo de 15 minutos, e que, adicionalmente, combinaram voltar ao local até se encontrarem. Neste caso particular, a expressão toma a forma

$P = 1 - (9/16)^s$

Representando P_S em função de s, obtemos a tabela:

Dias (s)	P_S	Dias	P_S
0	0,000	4	0,900
1	0,438	5	0,944
2	0,684	6	0,969
3	0,822	7	0,982

Vamos interpretar os resultados.

Para s = 0 temos P = 0, concordante com o anteriormente referido. Para s = 1 obtemos P = 0,438, solução do problema original. Ao fim de uma semana de encontros marcados, a probabilidade de os 2 espiões se encontrarem já é superior a 98%. Se não se encontrarem durante estas tentativas ou têm muito azar ou é caso para começarem a desconfiar. O valor da probabilidade de se encontrarem ao fim de duas semanas sobe para mais de 99,9%. Nesse caso não há azar que resista! Se não se encontrarem é porque algum deles foi preso pela contra-espionagem!

d) Vamos finalmente explorar um pouco mais a expressão do 5º caso. Consideremos dois espiões muito impacientes que só esperam um minuto um pelo outro. A probabilidade de se encontrarem numa única tentativa de encontro é bastante baixa (3%). No entanto, se tentarem durante um mês, essa probabilidade sobe para 64% e ao fim de um ano encontram-se quase de certeza (P=99,999%). Mesmo se fossem extremamente impacientes (por exemplo, com um tempo de espera de apenas um segundo), ao fim de 20 anos tinham grandes probabilidades de já se terem encontrado (P=98%).

Alberto Canelas

Primeiro Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática

Organizado pelo Seminário Nacional da História da Matemática, da Sociedade Portuguesa de Matemática, vai realizar-se o 1º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, em Coimbra, nas instalações do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, de 31 de Agosto a 3 de Setembro de 1993. Este Encontro é apoiado pela Associação de Professores de Matemática e pelos Departamentos de Matemática da Universidade de Coimbra e da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Os dois primeiros dias são destinados a conferências por investigadores brasileiros e portugueses, e os dois últimos a mini-cursos simultaneos de 10 horas. No fim de cada um dos dois primeiros dias realizar-se-ão mesas redondas, a primeira sobre "A História da Matemática no Ensino de Matemática" e a segunda sobre "Cooperação Luso-Brasileira em História da Matemática".

Do programa provisório constam as seguintes conferências: *A institucionalização da pesquisa matemática no Brasil, nos últimos 60 anos* (Ubiratan D'Ambrósio, Campinas), *A Matemática na Universidade de Coimbra de 1537 a 1771* (João Filipe Queiró, Coimbra), *José Anastácio da Cunha e a crise ideológica portuguesa dos fins do século XVIII* (Graça Silva Dias, Lisboa), *A teoria das paralelas segundo Euclides* (Rubens Gouvêa Lintz, São Paulo/Ontário), *Sobre a obra de J. Vicente Gonçalves* (José João Dionísio, Lisboa), *De Euler a La Condomine — da Matemática à História Natural da Amazónia* (Guilherme de la Penha, Belém), *Notas sobre o Ensino da Aritmética em Portugal* (Rogério Fernandes, Lisboa), *A epistemologia dos números complexos na Didáctica da Matemática* (Niltze Almeida, São Paulo), *A aritmética comercial na época dos Descobrimentos* (António Marques de Almeida, Lisboa), *A "Matemática-Materna" de algumas tribos indígenas brasileiras* (Eduardo Sebastiani Ferreira, Campinas), *Rudolfo Guimarães e "Les Mathématiques au Portugal"* (Luis Saraiva, Lisboa), *O desenvolvimento da Matemática no Brasil na século XIX e o positivismo de Conte* (Circe Mary da Silva, Caxias do Sul), *A Matemática no Brasil: seu desenvolvimento a partir de 1810* (Clóvis Pereira da Silva, Paraná), *Uma solução de Fermat para um problema de Frénicle* (José Morgado, Porto), *A difícil fundamentação dos números negativos na primeira metade do século XIX* (Fernando Raul Neto, Pernambuco), *Uma obra inédita de José Anastácio da Cunha: O "Ensaio das Minas"* (Maria Fernanda Estrada, Braga), *A divulgação da Matemática através das Enciclopédias Universais* (Sérgio Nobre, São Paulo/ Leipzig).

Os mini-cursos até agora previstos são os seguintes:

Clóvis Pereira da Silva (Paraná) — *História do desenvolvimento da Matemática no Brasil*

Eduardo Sebastiani Ferreira (Campinas) — *O uso da História da Matemática no Ensino*

Carlos Sá (Porto) — *História da Geometria Projectiva*

Luis Saraiva (Lisboa) — *História da Astronomia Grega*

Preços de inscrição:

Encontro (dias 31 de Agosto e 1 de Setembro): Sócios da SPM ou da APM— 1000$00; não sócios —1400$00.

Mini-cursos (dias 2 e 3 de Setembro): Sócios da SPM ou da APM —4000$00; não sócios — 4800$00.

Fichas de inscrição encontram-se na sede da APM, bem como uma lista de alojamentos recomendados pela Comissão Organizadora.

As inscrições terminam a 29 de Julho. Existem pré-inscrições nos cursos, devendo indicar-se uma ordem de preferência, pois o número de participantes é limitado. Enviar as inscrições para:

I Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Apartado 3008, 3000 Coimbra.