O problema do trimestre

Sobre as respostas ao problema anterior

No número anterior de "Educação e Matemática" propusemos o problema "Um triângulo APM":

Construir um triângulo [APM], não equilátero, nas seguintes condições:

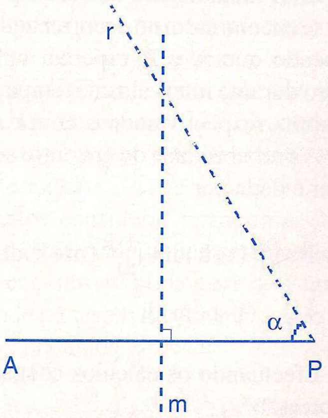
- O lado [AP] mede 10 cm.

- A mediatriz de [AP], a altura a partir de A e a mediana a partir de P são concorrentes no mesmo ponto.

Recebemos duas respostas, de Pedro Esteves (Seixal) e Alberto Canelas (Queluz). Os métodos propostos para a construção do triângulo são praticamente iguais.

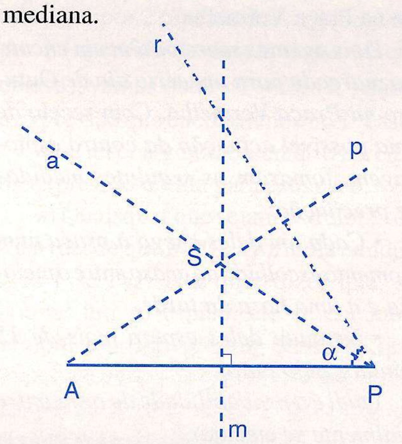
1º Traça-se o lado [AP] e a sua mediatriz **m**.

Escolhe-se um valor diferente de 60° para o ângulo α de vértice **P** e traça-se a recta **r** sobre a qual ficará o lado [PM].

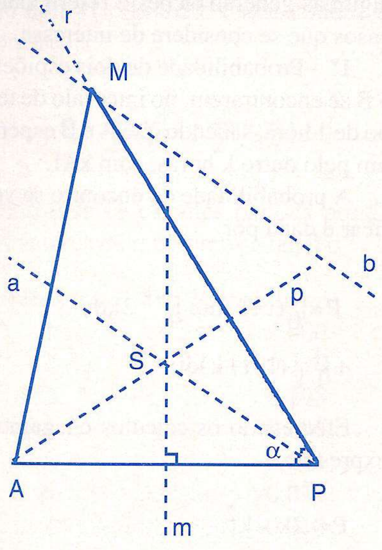


2º Traça-se por **A** a perpendicular **p** à recta **r**. A altura a partir de **A** ficará evidentemente sobre a recta **p**.

As rectas **p** e **m** intersectam-se em **S**. A mediana a partir de **P** terá então de passar por **S**. Por isso, unindo **P** com **S**, traça-se a recta **a** que irá conter essa mediana.



3º Como **a** é a mediana do lado [AM], o ponto **M** terá de ficar numa recta **b**, paralela a **a** e tal que a distância de **A** a **b** é o dobro da distância de **A** a **a**.



Traçada a recta **b**, o ponto **M** é a intersecção desta recta com **r**.

Está construído o triângulo nas condições pedidas.

A solução encontrada não é única, visto o ângulo α ter sido escolhido aleatoriamente. Para conhecer todas as soluções podemos resolver o problema analiticamente.

Fixamos o lado [AP] no eixo dos Ox, com **A** na origem do referencial e **P** de coordenadas (10;0) e procuramos as posições em que pode ficar o vértice **M**.

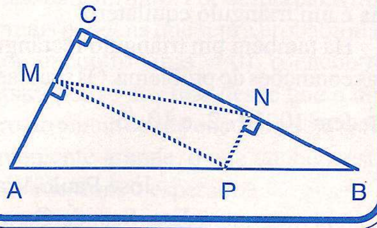
(continua na página seguinte)

Problema proposto

UM MÍNIMO NO TRIÂNGULO

O triângulo [ABC] é rectângulo em C. Escolhe-se um ponto P sobre a hipotenusa e por ele traçam-se as perpendiculares PM e PN aos catetos.

Onde deve estar o ponto P para que a distância de M a N seja mínima?



Este vértice é o ponto de intersecção das rectas **r** e **b**.

A recta **r** tem declive igual a - tg α.

Como **p** é perpendicular a **r**, o ângulo [SAP] mede 90 - α. Como o triângulo [SAP] é isósceles, a recta **a** tem declive - tg(90 - α) ou - cotg α. A recta **b** é paralela a esta, logo tem o mesmo declive.

Obtemos então o sistema:

Recta **r** $\quad y = -\operatorname{tg}\alpha \cdot x + 10 \operatorname{tg}\alpha$

Recta **b** $\quad y = -\operatorname{cotg}\alpha \cdot x + 20 \operatorname{cotg}\alpha$

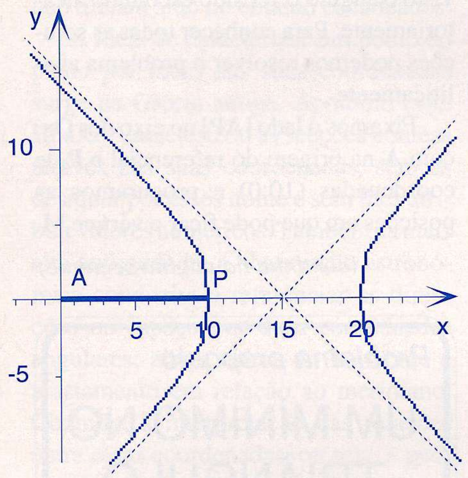
Eliminando α chegamos à equação

$y^2 = x^2 - 30x + 200$

que é o lugar geométrico dos pontos onde se pode situar o vértice **M**.

Esta curva é uma hipérbole de focos em $(15+\sqrt{50}\ ; 0)$ e $(15-\sqrt{50}\ ; 0)$ e em que as assímptotas são as rectas

$y = x - 15$ e $y = -x + 15$.



Pela análise da figura verificamos que, se **M** estiver no ramo do lado esquerdo da hipérbole, o ângulo α pode variar entre 45° e 90° (exclusivé). Se **M** estiver no ramo do lado direito, α pode variar entre 135° e 180° (exclusivé).

Alberto Canelas faz notar que o único triângulo isósceles solução do problema é um triângulo equilátero.

Há também um triângulo rectângulo nas condições do problema. Os seus lados medem 10, $10\sqrt{2}$ e $10\sqrt{3}$.

José Paulo Viana
Esc. Sec. de Carnide

Os espiões da Praça Vermelha

Alberto Canelas

De vez em quando aparecem problemas a partir dos quais se pode partir para novas aventuras.

É o que se passa com o "Encontro na Praça Vermelha", que permite fazer uma série de interessantes prolongamentos, variantes e generalizações.

No número 24 de *Educação e Matemática* foi proposto o problema "Encontro na Praça Vermelha":

Dois agentes secretos têm um encontro marcado para um certo dia de Outubro na Praça Vermelha. Com receio de uma possível actuação da contra espionagem, tomaram as seguintes medidas de precaução:

- *Cada um deles chega à praça num momento escolhido ao acaso entre o meio-dia e a uma hora da tarde.*
- *Nenhum deles espera mais de 15 minutos pelo outro.*

Qual é a probabilidade de o encontro realmente se efectuar?

A resolução deste problema foi publicada no número 25 desta revista. Apesar destes encontros de agentes secretos na Praça Vermelha estarem a ficar um pouco fora de moda, vale a pena fazer algumas generalizações e referir outros casos que se considere de interesse.

1º - Probabilidade de dois espiões A e B se encontrarem, no intervalo de tempo de 1 hora, sabendo que A e B esperam um pelo outro k horas, com $k \leq 1$.

A probabilidade do encontro se verificar é dada por

$$P=\int_0^k (t+k)\,dt+\int_k^{1-k} 2k\,dt+ \\ +\int_{1-k}^1 (1-t+k)\,dt$$

Efectuando os cálculos chegamos à expressão

$$P = 2k - k^2$$

Substituindo k por 1/4, obtemos o valor7/16, solução do problema inicial.

Podemos fazer uma tabela para alguns valores de k.

k(h)	**P**	**k(h)**	**P**
0	0	0,6	0,84
0,1	0,19	0,7	0,91
0,2	0,36	0,8	0,95
0,3	0,51	0,9	0,99
0,4	0,64	1	1
0,5	0,75		

Como seria de esperar, a probabilidade tende para 1 quando k tende para 1. De notar, que quando o intervalo de tempo de espera é de 0,9 h (54 minutos) já existe uma probabilidade de 99% de os espiões se encontrarem.

2º - Probabilidade de dois espiões A e B se encontrarem no decorrer de 1 hora, sabendo que A e B esperam um pelo outro durante intervalos de tempo de k e m horas, respectivamente, com $k,m \leq 1$.

A probabilidade do encontro se verificar é dada por

$$P=\int_0^m (t+k)\,dt+\int_m^{1-k} (m+k)\,dt+ \\ +\int_{1-k}^1 (1-t+m)\,dt$$

Efectuando os cálculos chegamos à expressão

$$P = k + m - \frac{k^2+m^2}{2}$$

Podemos calcular alguns valores dando as probabilidades de encontro de dois