

Perseguindo polígonos, simetrias e números

Helena Paradinha

A actividade

A proposta foi a seguinte:
“Investiguem qual o número máximo de eixos de simetria de polígonos regulares e irregulares.”*

Ela surgiu da leitura do artigo “Symmetries of irregular polygons” da revista *Mathematics Teacher* (Maio de 1992) e pelo facto de, na altura, estar a planear as primeiras aulas de Geometria, optando por simetrias axiais.

A turma

A proposta foi feita a uma turma do 9º ano, heterogénea relativamente ao aproveitamento, quer na disciplina de Matemática quer nas restantes.

Desde o início do ano que têm sido propostas à turma actividades de exploração e problemas, que os alunos resolvem em grupo, a maioria delas ligadas aos conteúdos programáticos. Este tipo de actividades tem ocupado cerca de metade das aulas. Esta turma tem reagido muito bem a esta metodologia. Contrariamente à minha experiência anterior, os “bons alunos” têm sido os que melhor aderem, quer ao tipo de actividades, quer à metodologia utilizada. Estes alunos, nos anos anteriores não tinham tido experiências análogas.

A metodologia

Para o estudo da Geometria do plano, foram constituídos novos grupos, com 3 alunos cada. Estas aulas de 2 horas semanais, realizaram-se numa sala com com-

* Duas fichas de trabalho para os alunos podem ver-se nos “Materiais para a aula de Matemática” desta revista.

putadores. Enquanto metade da turma realiza actividades em Logo.Geometria, a outra metade trabalha com outros materiais, trocando as tarefas na semana seguinte. Esta foi a segunda actividade realizada fora do computador e previa-se que decorresse numa aula de duas horas. Porém, mais tarde, pareceu-me importante prolongá-la por mais uma hora.

Os materiais utilizados foram a ficha de trabalho, espelhos e papel quadriculado.

Os alunos deveriam elaborar um relatório sobre o trabalho desenvolvido. Esse relatório poderia ser concluído em casa.

Os objectivos

Com esta actividade pretendia levar os alunos a:

- resolver problemas;
- experimentar... desenhar figuras que obedecessem a determinadas condições;
- formular conjecturas, testá-las e reformulá-las;
- organizar dados;
- identificar regularidades;
- demonstrar, argumentar e criticar;
- confrontar, em grupo, diferentes opiniões e convicções;
- aprofundar conhecimentos sobre polígonos e simetrias;
- estimular o gosto pelas actividades de investigação;
- adquirir hábitos de trabalho, reflexão e persistência;
- desenvolver autonomia e auto-confiança.

Quando preparei esta aula, tentei prever várias situações. Mas tive muitas surpresas, a maior das quais foi o aparecimento de várias conjecturas e a facilidade com que eram reformuladas.

O papel do professor

A minha intervenção no desenrolar da actividade centrou-se em:

- observar o trabalho dos alunos;
- encorajar a experimentação;
- incentivar o confronto de experiências e opiniões;
- questionar os alunos com vista a:
 - explicitar raciocínios;
 - estimular a argumentação;
 - sensibilizar para a necessidade da demonstração;
 - incentivar o aparecimento de novas questões.

Descrição do decorrer da actividade

Alguns grupos perguntaram: "O que é que temos de fazer?". Outros iniciaram espontaneamente o trabalho encontrando os eixos de simetria dos polígonos regulares. Este acabou por ser o modo como todos os grupos iniciaram a actividade. Nesta fase, todos os alunos desenhavam os eixos nas suas fichas, alguns utilizando muito os espelhos, e comparavam com os colegas de grupo o que iam fazendo. Passado algum tempo os grupos diziam "... o número de eixos de simetria é igual ao número de lados do polígono" (ou ao número de vértices). Nas folhas que estavam em cima das mesas viam-se fichas de alunos que tinham estudado os 5 primeiros polígonos regulares que figuravam na 1ª folha anexa, outros 6 e outros todos os da 2ª folha anexa (polígonos regulares com 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 lados).

Perguntei a cada grupo a razão por que afirmavam que o número de eixos de um polígono era igual ao número de lados.

Em alguns grupos houve dificuldade em responder à questão e então eu perguntei porque é que um polígono de 15 lados tinha 15 eixos, sem desenharem esse polígono. A esta questão responderam:

- É semelhante ao caso do pentágono e como aí há um eixo por lado, neste caso também haverá.

Depois de questões do tipo: "O que acontece se o polígono tiver 37 lados? E

38?" os alunos foram identificando mais semelhanças e ao fim de pouco tempo formularam conclusões separando o caso dos polígonos com um número par e um número ímpar de lados.

O Nuno Miguel foi o único aluno que respondeu logo:

- No caso do polígono ter um número ímpar de lados, os eixos de simetria constroem-se unindo um vértice ao meio do lado oposto e, se o número de lados for par, unem-se os vértices opostos e os pontos médios dos lados opostos.

Passaram então a estudar o caso dos polígonos irregulares.

Começaram a desenhar triângulos e nos primeiros que fizeram (escalenos e rectângulos) não encontravam qualquer eixo de simetria. Seguidamente desenharam triângulos isósceles e houve grupos onde surgiram triângulos rectângulos isósceles. Quando questionados sobre que características teriam que ter os triângulos para terem 1 eixo de simetria alguns grupos responderam imediatamente que tinham que ter lados iguais (ou que eram isósceles). Nenhum grupo referiu que dois ângulos deveriam ser iguais.

Perguntei-lhes se haveria triângulos com dois eixos de simetria. Nesta altura, na maior parte dos grupos as respostas foram categóricas: "não é possível", "se houver dois, haverá três eixos", "se houver dois eixos, o triângulo é equilátero".

Pedi-lhes para explicarem o que os levava a dizer isso, aproveitando o facto de haver elementos do grupo que não estavam convencidos. Uma vez que os alunos se limitavam a reafirmar as suas convicções, sugeri-lhes que pensassem no que acontecia se num dos triângulos que eles tinham desenhado acrescentassem um eixo. Eles desenharam o segundo eixo unindo um vértice ao ponto médio do lado oposto e viram que isso implicava que o lado diferente fosse igual aos outros e portanto o triângulo fosse equilátero.

Quando isto foi conseguido no grupo da Ana Patrícia, esta exclamou: "Já sabia!". Voltou a olhar para aquilo que tinha acabado de ser feito e disse ainda: "Mas isto é muito giro!".

A afirmação "se houver dois, haverá

três eixos" apareceu mesmo em grupos que não a explicitaram inicialmente. Por exemplo, reparei que num grupo, quando sugeri que desenhassem o segundo eixo, enquanto o Henrique o desenhava, a Sónia já estava com o seu lápis próximo do papel. Logo que o colega acabou, ela desenhava imediatamente o terceiro eixo. Perguntei-lhe porque razão ela estava a fazer isso e ela disse-me que se existisse o segundo eixo então existiria o terceiro.

Houve só um grupo onde a resposta inicial foi um tímido "Talvez haja...".

Dei-lhes mais algum tempo para fazerem mais experiências e depois disso todos asseguravam que não era possível.

Os grupos estudaram a seguir quadriláteros e encontraram os dois casos em que havia 2 eixos de simetria (rectângulos e losangos). Em todos os grupos havia vários desenhos de quadriláteros côncavos e convexos com 1 eixo e sem eixos de simetria. Houve alunos que tinham rectângulos desenhados com 4 eixos e trapézios com 2 eixos, onde foi necessário a minha intervenção nos grupos para confrontarem as suas experiências. Os espelhos deram aqui uma importante ajuda.

Primeiras conjecturas

Nessa altura surgiram nos grupos algumas conjecturas:

"Nos polígonos com um número par de lados há 2 eixos, e com um número ímpar há 1 eixo";

"Cada 2 lados iguais dá origem a um eixo."

Estudaram polígonos de 5, 6, 7 e 8 lados e a primeira conjectura mantinha-se pois as figuras que eles faziam ou tinham 1 ou 2 eixos, e estavam convencidos que o problema estava resolvido. Nas folhas quadriculadas, onde eles faziam experiências, estavam desenhados muitos polígonos côncavos e convexos e os grupos solicitavam-me para mostrar o que tinham concluído. A segunda conjectura foi abandonada quando estudaram polígonos com 5 lados.

Nesta altura, enquanto eu conversava com um grupo, ouvi no grupo ao lado o Carlos dizer: "Quando o número de lados do polígono é primo o número de

eixos de simetria é 1". Mais tarde, o Carlos disse-me:" Foi uma ideia que me veio de repente à cabeça quando estava a ver porque é que o pentágono tinha 1 eixo de simetria". Acrescentou ainda "...não sei bem explicar o que aconteceu".

Na aula que se seguiu, disse-lhes para continuarem a procurar o número máximo de eixos de simetria de polígonos irregulares. Dissc-lhes que procurassem, por exemplo, hexágonos ou octógonos com mais de dois eixos.

Nalguns grupos, que não conseguiram descobrir nenhum hexágono com três eixos, sugeri-lhes que uma vez que já tinham um polígono regular com três eixos (triângulo equilátero), o modifi-

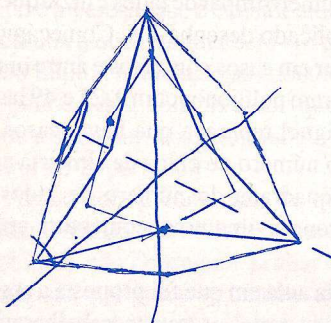


figura 1

cassem de modo a obter um hexágono.

Assim, os alunos encontraram hexágonos, como os da fig. 1, e havia discussão nos grupos se ele era regular ou não, uma vez que a figura obtida tinha todos os lados iguais. Outro grupo encontrou outro hexágono (fig. 2)

Nem todos os grupos começaram

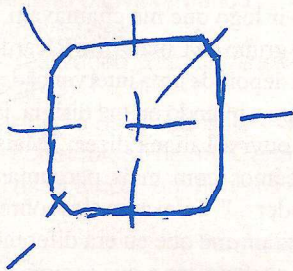


figura 3

pelos hexágonos. Houve grupos cujo primeiro contra-exemplo encontrado foi um octógono (fig. 3), obtido a partir de um quadrado, e ainda outros que encontraram um polígono de 28 lados (fig. 4), partindo de um heptágono regular

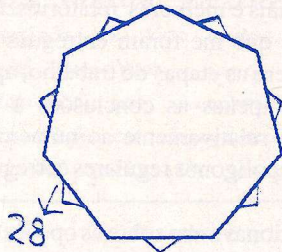


figura 4

Reformulando as conjecturas

Houve grupos que reformularam as suas conjecturas. O grupo do Nuno Miguel entregou-me um relatório, onde eles escreveram que, para os polígonos com um número par de lados, o número de eixos se obtém pela divisão do número de lados por 2. Continuaram a afirmar que para os polígonos com um número ímpar de lados, o número de eixos será 1.

Do grupo das Catarina, que na aula diziam que o número de eixos estava ligado aos divisores do número de lados

dos polígonos, recebi, uns dias depois, um relatório onde aparece: "... Por exemplo no triângulo, o dividendo será 3 por-

que é o número de lados. O divisor será um número inteiro positivo, para o quociente ser um número inteiro positivo, porque não há meios eixos ou eixos negativos. Os divisores só poderão ser 1, que dará 3, que é o que acontece com os polígonos regulares, e 3 que dará 1, que é o que acontece com os irregulares. O 2 não poderá ser pois a divisão não será um número inteiro."

Perguntei-lhes como calculavam o número de eixos no caso de polígonos

com 15, 30 e 49 lados. Fizeram as divisões

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 15} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 \overline{) 30} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 49 \overline{) 49} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

e responderam que haveria 5, 15 e 7 eixos. Interroguei-as ainda sobre como tinham descoberto os divisores das operações que fizeram e elas disseram que "era como na decomposição dos números em factores, que vimos nos radicais", isto é, dividiam o número de lados pelo menor número primo divisor desse número.

Reflectindo sobre o trabalho

O meu gosto por este tipo de actividades e o facto de as simetrias serem um tema a ser tratado levaram-me a propor esta actividade aos alunos.

Sabia que não ia ter uma adesão fácil e imediata da parte de todos e que o apoio que iria dar aos grupos ia ser importante no desenrolar do trabalho.

Na primeira aula de duas horas os grupos solicitaram muito a minha presença e eu sentia que avançavam pouco sem a minha intervenção. O facto dos grupos terem sido constituídos há pouco tempo e haver alguns com alunos que não tinham trabalhado juntos no primeiro período, levaram-me a pensar que não tinha escolhido a melhor altura para esta actividade. Esta talvez necessitasse de mais experiência anterior da parte dos alunos, quer em resolver problemas, quer em trabalhar em grupo.

Identifiquei 3 níveis de envolvimento diferente por parte dos alunos, que a meu ver, acompanharam 3 fases distintas do trabalho. Na primeira fase, todos começaram pelo estudo de polígonos regulares e encontraram facilmente uma relação entre o número de lados e o número de eixos de simetria. Com o mesmo interesse, iniciaram o estudo nos polígonos irregulares e formularam a conjectura: "nos polígonos com um número par de lados é 2 e nos ímpares é 1". O facto de terem uma explicação que lhes parecia adequada aos dados recolhidos, levou uma grande maioria dos alunos a considerarem que o trabalho estava terminado. Foi demorado e não foi fácil encontrarem um contra-exemplo que

novamente lhes criasse uma situação de "instabilidade" e a necessidade de ultrapassar. A minha sugestão de modificarem polígonos regulares, mantendo os eixos de simetria, foi importante para desbloquear esta situação. Surgiram vários desenhos nos grupos e o trabalho de grupo retomou a dinâmica anterior. O facto de aparecerem vários polígonos côncavos, ao contrário da minha expectativa, veio enriquecer o trabalho.

No decorrer da actividade senti prazer quando, por várias vezes, os vi a formularem conjecturas, algumas das quais vinham posteriormente a rejeitar. Embora esta actividade tenha surgido na sequência de outras que também envolviam exploração de problemas, aquele processo de reformulação de conjecturas exigiu dos alunos um maior esforço.

A componente experimental da actividade permitiu o envolvimento dos alunos mais fracos tendo havido intervenções destes alunos enriquecedoras como, por exemplo, encontrarem um polígono de 9 lados com 3 eixos, enquanto os colegas procuravam um hexágono irregular com os mesmos eixos.

Quando preparei esta aula pensei em várias situações que poderiam surgir. No entanto tive muitas surpresas. Uma delas foi a facilidade com que surgiram as primeiras conjecturas, por exemplo "cada 2 lados iguais dão origem a um eixo", que pouco tempo depois foi reformulada para "cada 2 lados iguais e paralelos dão origem a um eixo".

Outra foi a importância da intuição no desenrolar dos trabalhos. Surpreendeu-me o caso do Carlos que, ao fim de cerca de uma hora e meia de trabalho, já tinha intuído que os polígonos com um número primo de lados tinham no máximo um eixo de simetria.

Ainda uma outra surpresa foi o número de explorações laterais que surgiram a propósito do tema central, bem como o facto de os alunos terem seguido caminhos diferentes e terem prosseguido até níveis diferentes de profundidade.

E por fim...

Apesar de os alunos terem revelado interesse em descobrir cada vez mais polígonos irregulares e se terem mostra-

do intrigados por não descobrirem rapidamente uma conjectura que abrangesse todos os casos que estudaram, eu não estava satisfeita. Gostaria que tivesse havido mais empenhamento na tarefa, mais discussão nos grupos, mais "demonstrações", mais contra-exemplos e ainda... mais e melhores relatórios. Nos relatórios que me foram entregues nenhum refere as etapas do trabalho, apresentando apenas as conclusões a que chegaram relativamente ao número de eixos dos polígonos regulares e irregulares.

Questionava-me sobre as opções que tomei: Será que deveria ter feito uma ficha mais estruturada? Será que deveria ter usado outros materiais? O livro de espelhos? O geoplano circular? Papel e tesoura? Deveria ter estimulado outras abordagens ao problema, por exemplo, ter dado mais importância à orientação dos eixos de simetria nas figuras? Pensei também nas implicações das minhas sugestões. Teriam sido dadas na altura certa? Os alunos usarão o raciocínio seguido na demonstração, por redução ao absurdo, noutras situações? Teria sido boa ideia pedir aos alunos para modificarem polígonos regulares, para obter polígonos irregulares, com os mesmos eixos? Pensava também que deveria ter dado uma maior atenção à motivação para este tipo de actividade. Em alguns grupos este assunto surgiu, mas não em todos.

Queria que os alunos continuassem a investigação, mas receava que estivessem cansados dela. Pensei fazer uma aula de discussão, mas pensava que resultaria melhor se os alunos tivessem avançado mais. Surgiu-me então a ideia de fazer uma segunda ficha de trabalho onde começaria por salientar a importância do trabalho de investigação, colmatando assim a falta de atenção dada à motivação. Queria também que eles conhecessem o trabalho que os outros grupos desenvolveram e que respondessem a questões que foram surgindo nos grupos. Eu tinha registado uma série de questões, pois sempre que eu pensava neste problema, novas perguntas me surgiam.

Elaborei então, de um só fôlego, uma segunda ficha de trabalho, com as ques-

tões surgidas entretanto, para a aula de 2h seguinte.

Antes da realização dessa ficha, no fim de uma das aulas de 50 m, o grupo das Catarinas entregou-me um novo relatório. O Nuno Miguel, o Carlos e o Miguel, faziam-me várias perguntas. Queria saber como calcular o número de eixos de polígonos com um número ímpar de lados, pois já sabiam com um número par. O Nuno Miguel entregou-me um novo relatório e dizia que continuava com dúvidas se teriam um só eixo. Ficaram os três no intervalo a falar comigo e o Nuno insistia para eu lhe tirar a dúvida. O Carlos dizia "às vezes estou a ver televisão e a imaginar os polígonos". Queria encontrar mais exemplos com um número ímpar de lados e dizia que era complicado desenhá-los. Começámos a pensar em casos concretos e entre outros surgiram polígonos com 9, 25 e 49 lados. O Miguel reparava que havia casos em que o número de eixos de simetria era a raiz quadrada do número de lados do polígono e uma nova conjectura aparecia.

Na aula em que foi proposta a segunda ficha, todos os grupos trabalharam na actividade com empenhamento. Ainda havia dificuldade em responder a perguntas do tipo "porque é que isto acontece?", mas notei a facilidade em perceber a necessidade do contra-exemplos e a rapidez em encontrá-lo. As Catarinas não quiseram fazer intervalo para acabarem a ficha. Estavam confiantes que sabiam dar todas as respostas.

No grupo do Miguel falavam do m.d.c., dizendo "o m.d.c. de 25 era 5". Disseram-me que ficaram muito satisfeitos por eu ter conversado com eles sem me terem solicitado. Este grupo foi um daqueles que nas primeiras aulas me solicitavam bastante e reclamavam por eu não ir logo que me chamavam.

No grupo da Liliana, do Ricardo e da Teresa depois de uma intervenção minha no grupo e quando eu me dirigia já para outro, ouvi a Liliana dizer: "Mais uma vez ficámos com mais perguntas para responder...". Falei com eles sobre isto e eles diziam-me que eu era diferente dos outros professores e que raramente lhes dava respostas. Disse-lhes que gostava

de saber as opiniões deles sobre este trabalho e pedi-lhes para as escreverem. Eles decidiram que o fariam em grupo. A Liliana é a delegada da turma, no início do ano disse-me que não gostava de Matemática e que já há alguns anos que tinha dificuldades na disciplina. Na aula participa pouco mas disse-me, no fim do 1º período, que as aulas a interessaram. Quando se pede uma opinião sobre assuntos fora da disciplina, ela é a primeira a falar e apresenta argumentos com facilidade. Estas últimas características são também as do Ricardo que me disse no início do ano que não gostava de Matemática e nas aulas se mostrou várias vezes desinteressado. Tal como a Liliana tem vindo progressivamente a colaborar mais, nas aulas. O terceiro elemento do grupo é a Teresa, que é considerada uma boa aluna e que trabalha bem em grupo, tendo muito em atenção as dificuldades e opiniões dos colegas com que tem vindo a trabalhar. Este grupo só foi constituído no 2º período.

Acabo com a convicção de que foi fundamental não ter desistido numa altura em que não conseguia avaliar claramente até que ponto os alunos tinham avançado na exploração. Parece-me que a persistência foi um factor essencial para superar a fase inicial do trabalho que era um pouco desen-corajadora, pois os seus frutos não eram observáveis.

Uma das sensações com que fiquei foi a de que com estas actividades os alunos revelaram potencialidades que de

A nossa opinião é muito precisa. Após vários trabalhos realizados no decorrer de todas estas aulas, chegámos à conclusão de que estes trabalhos são muito úteis para o desenvolvimento mental. Na medida em que temos que formular ideias variadas e depois, primeiro por tentativas e ~~depois~~ seguidamente por cartazes, passamos para a concretização destas.

De cada vez que nos surge uma dúvida e temos a ideia de perguntar à professora, ela esclarece-nos mas dá-nos outras informações que por um lado resolve a nossa dúvida mas por outro deixa-nos mais pensativas e outras dúvidas, sendo quase um ciclo repetitivo onde acabamos por encontrar soluções.

Resumindo, não desparámos nos com a matemática nas coisas mais simples da vida, dando-nos sempre pensativos em relação ao que ela nos pede.

Opinião sobre este trabalho do grupo da Liliana, Ricardo e Teresa

outra forma me poderiam ter passado despercebidas. Particularmente estimulante foi o facto de, passadas três semanas, o Nuno Miguel me ter entregue um 4º relatório. Por corresponder a uma preocupação em melhorar e reflectir o próprio processo de investigação, descrevendo as dificuldades que teve, as conjecturas que fez, os contra-exemplos que o levaram a reformular as conjecturas, a leitura deste relatório constituiu para mim um dos momentos mais compensadores na minha vida profissional.

Helena Paradinha
Esc. C+S Pedro de Santarém

Nota — Agradeço aos alunos da turma 9º D o prazer que me deram em ter realizado este trabalho.

Materiais para a aula de Matemática

As propostas apresentadas nas duas fichas das páginas seguintes referem-se ao artigo anterior "Perseguindo polígonos, simetrias e números" onde se encontram indicações sobre a metodologia seguida, algumas respostas, reacções e atitudes dos alunos.

Com a primeira ficha pretendia levar os alunos a formular conjecturas, experimentar, demonstrar, argumentar, criticar e estimular-lhes o gosto por actividades de investigação. O anexo facilitou a organização dos dados. Foi também fornecido um outro anexo com desenhos de polígonos regulares de 3 a 12 lados. Os alunos puderam usar espelhos, sempre que o desejaram.

Pedi-lhes que fizessem um relatório do trabalho desenvolvido pois interessava sobretudo valorizar o processo vivido por eles, mais que os resultados a que chegaram. Este relatório poderia ser concluído em casa.

A segunda ficha de trabalho surgiu da necessidade de preencher algumas lacunas relacionadas com o aparecimento nos grupos de diferentes conjecturas, contra-exemplos e problemas laterais que eu gostava que fossem partilhados por todos. Além disso pretendia reforçar a percepção do que era um trabalho de investigação.

A facilidade com que os alunos responderam a algumas questões desta ficha restituiu-lhes confiança, levou-os a compreender a importância do trabalho feito anteriormente e permitiu-lhes aprofundá-lo.

Helena Paradinha

Grupo de Trabalho sobre Investigação (GTI)

- Aberto a todos os sócios interessados na investigação em educação matemática; grupo coordenador escolhido pelo Grupo
- Objectivos essenciais:
 - constituir um espaço de comunicação entre os sócios do Grupo
 - promover a articulação entre investigação em educação matemática e ensino da Matemática
- Actividades
 - realização dos *Seminários de Investigação em Educação Matemática (SIEM)*
 - edição da *Quadrante — revista teórica e de investigação*
 - constituição de um *Centro de Documentação* (conta já com a *Colecção Teses* e com um ficheiro informatizado)

Para mais informações, escrever para
APM/sede — A/c Henrique M. Guimarães