Vantagens pedagógicas da perspectiva frequencista de probabilidade

José António Fernandes e Conceição Almeida

Neste artigo, são discutidos diferentes pontos de vista do conceito de probabilidade e procura-se destacar o interesse do *ponto de vista frequencista* no ensino de conceitos probabilísticos enquanto primeira etapa facilitadora da abordagem dos outros pontos de vista e enquanto primeira abordagem curricular.

Introdução

Os pressupostos epistemológicos e filosóficos em que se baseia o conhecimento de uma dada área do saber influenciam, em maior ou menor grau, o ensino dos professores e a aprendizagem dos alunos. No caso da matemática, foram e/ou são marcantes para o seu ensino-aprendizagem variadas correntes de pensamento, de que são exemplos mais recentes: o formalismo, defendido por Hilbert (1862-1943), o positivismo lógico da Escola de Viena, predominante nos anos 40 e 50, e o quase-empirismo, advogado por Lakatos (1922-1973).

Naturalmente que a adesão a uma perspectiva formalista ou quase-empírica, terá consequências diferentes ao nível do processo didáctico. Para tal, basta considerar que o programa formalista consistiu numa procura incessante de uma verdade universal e absoluta para a matemática e a perspectiva quase-empírica coloca a matemática no domínio do questionável e do falível.

Muito embora uma abordagem didáctica assente em várias perspectivas conceptuais da matemática possa aumentar a capacidade de generalização, segundo a lei da *variabilidade matemática* de Dienes, a ênfase em certas perspectivas em detrimento de outras pode revelar-se facilitadora da aprendizagem em determinados momentos curriculares.

Pontos de vista das probabilidades

O conceito de probabilidade pode ser visto diferentemente consoante os fundamentos em que se baseia ou os princípios que releva. Para Hacking (1975), o conceito de probabilidade assumiu sempre, ao longo dos tempos, um carácter essencialmente dual. Por um lado, a probabilidade é estatística na medida em que se alicerça nas leis estocásticas dos processos do acaso — ponto de vista *objectivista* — e, por outro lado, é epistemológica na medida em que avalia graus de crença ou de convicção em proposições desprovidas de fundamento estatístico — ponto de vista *subjectivista*.

As contribuições de Leibniz (1646-1716), relacionadas com graus de prova em direito, e de Huygens (1629-1695), sobre problemas aleatórios acerca de jogos de sorte-azar, realçam a dualidade da probabilidade desde o seu aparecimento.

O ponto de vista objectivista

Aderindo ao critério de objectividade que o "matemático clássico" adopta para validar o conhecimento, podem-se incluir, aqui, três dos conceitos de probabilidade referidos por Hawkins e Kapadia (1984) e Orton (1988): o conceito clássico ou *a priori* , o conceito axiomático ou formal e o conceito frequencista ou empírico.

O conceito clássico ou *a priori*. Esta perspectiva de probabilidade, que foi dominante até ao tempo de Jacob Bernoulli (1654-1705), emergiu e desenvolveu-se a partir de reflexões sobre jogos de sorte-azar.

Uma exemplificação típica deste conceito, realiza-se no problema de extrair uma bola de uma certa cor de uma urna que contém bolas de várias cores. Perante esta situação, começa-se por identificar todos os acontecimentos possíveis (sejam n) — que são mutuamente exclusivos e igualmente possíveis — e, seguidamente, de entre estes, determinam-se aqueles que são favoráveis, isto é, os que verificam determinado acontecimento A (sejam n_A). Assim, a probabilidade do acontecimento A é a razão n_A/n.

No caso da uma urna conter 7 bolas brancas e 5 bolas vermelhas, a probabilidade de extrair uma bola de cada uma das cores será:

$$P(\text{extrair bola branca}) = \frac{7}{12}$$
$$\text{e } P(\text{extrair bola vermelha}) = \frac{5}{12}$$

Para Konold (1983), a assunção de que os acontecimentos devem ser igualmente possíveis, constitui a maior limitação desta definição. Tal constrangimento pode ser visto a dois níveis: primeiro, não dá resposta aos acontecimentos não equiprováveis — caso da probabilidade de no lançamento de um *punais* , este cair com a 'cabeça' para baixo — e, segundo, a própria definição clássica de probabilidade apresenta um carácter circular, pois as afirmações "igualmente possíveis" e "igualmente prováveis" são sinónimas, não podendo qualquer delas ser usada para explicar a outra.

O conceito axiomático ou formal. É a Kolmogorov (1903-1987), matemático soviético, que se deve a correcta axiomatização da teoria das probabilidades, estabelecendo as suas ligações com a teoria métrica das funções.

A probabilidade é entendida como uma função que a acontecimentos de um espaço amostral faz corresponder valores do intervalo [0, 1]. Esta função de probabilidade deve satisfazer aos três axiomas de Kolmogorov: (i) o número atribuído a um acontecimento deve ser não negativo; (ii) o valor atribuído ao espaço amostral deve ser 1 e (iii) a probabilidade de dois acontecimentos disjuntos é igual à soma das probabilidades dos acontecimentos, tomados individualmente.

Em notação simbólica, sendo A e B dois acontecimentos disjuntos quaisquer do espaço amostral Ω, tem-se:

(i) $P(A) \geq 0$;

(ii) $P(\Omega) = 1$ e

(iii) P(A» B) = P(A) + P(B).

No caso da experiência aleatória do lançamento de uma moeda, as probabilidades de obter a frente (F) ou o verso (V) da moeda, são:

P({F}» {V}) = 1
({F}» {V} = {V, F} = Ω)

P({F}) + P({V}) = 1
({F} e {V} são acontecimentos mutuamente exclusivos)

P({F}) + P({F}) = 1
({F} e {V} são acontecimentos equiprováveis)

2 P({F}) = 1
$P(\{F\}) = P(\{V\}) = \frac{1}{2}$

O conceito frequencista ou empírico. Esta interpretação de probabilidade procura ultrapassar a natureza *a priori* dos conceitos clássico e axiomático. Os defensores desta abordagem associam probabilidades aos acontecimentos a partir da frequência com que experienciam esses acontecimentos.

Mais formalmente, dir-se-á que um experimentador que tenha observado n acontecimentos, dos quais n_A possuem um certo atributo A, considerará a probabilidade de A como sendo aproximadamente a razão n_A/n. A probabilidade teórica é, então, definida como o limite de n_A/n quando n tende para infinito [a razão n_A/n também pode ser designada por probabilidade prática de acordo com a noção de certeza prática em oposição à noção de certeza absoluta, consideradas por Sebastião e Silva (1975)].

Este conceito de probabilidade relaciona-se com o conceito clássico de probabilidade através da "lei dos grandes números", que foi pela primeira vez abordada por Jacob Bernoulli (1654-1705), da qual se fala mais adiante neste artigo.

Para Matalon (1980), a objectividade é vista num sentido mais restrito, identificando-se a "escola objectivista" com a "escola frequencista". Para além de 'acusar' a escola clássica de uma definição circular de probabilidade, tal como Konold (1983), a sua adesão ao carácter empírico das probabilidades parece bem vincada na sua afirmação:

"A escola dita "objectivista" ou "frequencista" recusa considerar como relevante para o cálculo de probabilidades todo o sentimento de incerteza que não seja o que assenta na ocorrência de tais acontecimentos, quer dizer, susceptíveis de se repetir em condições idênticas, o que permite aos enunciados probabilísticos serem verificados empiricamente." (Matalon, 1980, p. 437).

Assim, para Matalon, falar da probabilidade de um acontecimento por natureza único ou da probabilidade de uma proposição ser verdadeira, não tem qualquer sentido.

O ponto de vista subjectivista

No sentido matemático, a questão de fundo da teoria das probabilidades consiste em saber se (i) a probabilidade traduz uma situação de incerteza e (ii) se uma situação de incerteza pode ser representada por uma probabilidade. Os "subjectivistas" ou "personalistas", para além de satisfazerem o enunciado (i) como acontece com os objectivistas, dão uma ênfase especial ao enunciado (ii).

O facto de os subjectivistas, na tentativa de aplicarem o cálculo das probabilidades ao maior número de situações de incerteza, romperem com algumas limitações impostas pelo rigor objectivista não deve ser entendido como sinónimo de arbitrariedade, pois, para eles, o cálculo das probabilidades deve preservar o seu carácter científico.

Segundo Matalon (1980), os subjectivistas concordam em que o cálculo das probabilidades exprime a coerência do comportamento e divergem quanto à definição que dão desse comportamento. Para concretizar a ideia, pense-se nas apostas que um indivíduo perfeitamente racional está disposto a aceitar sobre a ocorrência de certo acontecimento; apostas essas que são equitativas, ou seja, o indivíduo não procura ganhar mas antes não perder. Assim, para um ganho fixo, quanto mais elevada for a parada que o jogador está disposto a arriscar maior será a sua confiança na realização do acontecimento e as suas diferentes apostas são as que maximizam a esperança matemática, tendo os seus graus de convicção todas as propriedades das probabilidades.

Nesta concepção de probabilidade, Matalon (1980), Hawkins e Kapadia (1984), Orton (1988) e Konold (1983; 1988) afirmam que a probabilidade atribuída a um acontecimento resulta do grau de convicção do sujeito relativamente à sua realização, o que significa que o conceito de probabilidade se desloca do acontecimento para o sujeito.

Muito embora se tenham feito esforços, relativamente bem sucedidos, para estabelecer uma definição o mais completa possível do comportamento racional - uma das mais importantes deve-se a Savage — este ponto de vista abrangente do conceito de probabilidade foi aceite apenas por uma minoria, tendo-lhe os objectivistas dirigido inúmeras críticas. Assim, imaginaram-se situações nas quais indivíduos julgados racionais se comportavam, por vezes, de modo incompatível com os axiomas; pode contestar-se que o comportamento racional, como foi definido, seja de facto racional e a teoria assegura que, no indivíduo racional, as probabilidades representam graus de convicção mas não garante que tais graus de convicção expressos pelos indivíduos sejam de facto probabilidades.

Para Konold (1988) as teorias subjectivistas têm duas características essenciais: *são normativas*, no sentido da aprovação e por referência à opinião de especialistas, especificando quão racionais devem ser para formular e alterar as suas crenças à luz de nova informação e *não são descritivas* quanto à forma como as pessoas formulam e alteram probabilidades subjectivas.

O ponto de vista frequencista e o ensino

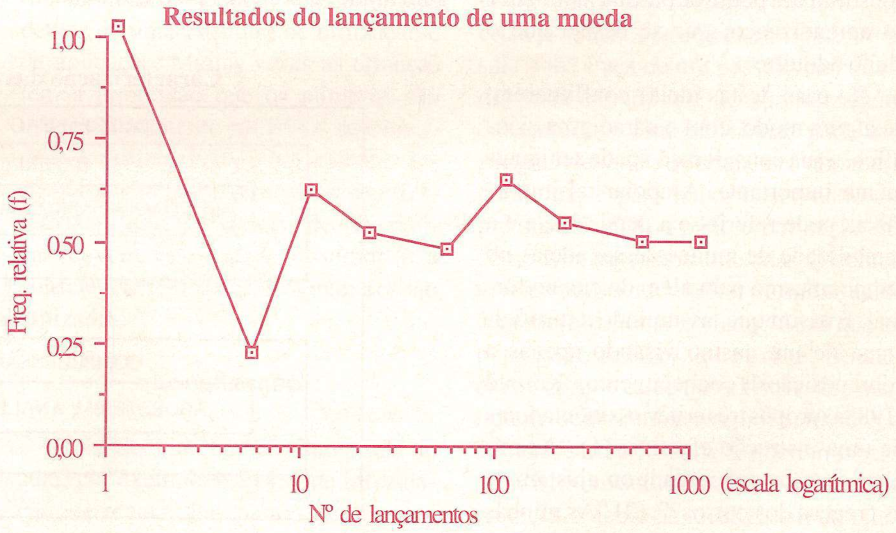
As vantagens da abordagem do conceito de probabilidade numa perspectiva frequencista destacam-se quando se procura introduzir o conceito a alunos muito jovens, como prevê a reforma curricular que está actualmente a ser implementada no nosso país. De acordo com os novos programas, o conceito de probabilidade é introduzido no 9º ano de escolaridade e desenvolve-se durante o o Ensino Secundário, o que constitui uma inovação relativamente aos antigos programas. Tal inovação verifica-se relativamente ao ano de escolaridade em que é introduzido pela primeira vez o conceito, ao seu estudo por parte dos alunos da área de Humanísticas e ao grau de desenvolvimento com que ele é tratado ao longo do Ensino Secundário.

Particularmente aquando da introdução do conceito, o interesse do ponto de vista frequencista pode ser visto em relação às outras perspectivas do conceito de probabilidade e ao nível da organização curricular.

O ponto de vista frequencista e as outras perspectivas

A fundamentação teórica do conceito frequencista de probabilidade reside na chamada "lei dos grandes números" que afirma que "para um grande número de experiências, tendo cada uma um resultado aleatório, a frequência relativa de obtenção de cada um desses resultados tende a estabilizar-se, convergindo para um certo número, a probabilidade desse resultado." (Ventsel, 1973, p. 14).

O gráfico seguinte exemplifica a estabilização da frequência relativa do resultado "obter a face frente" na experiência do lançamento de uma moeda ao ar. Através do gráfico constata-se que, à medida que o número de experiências aumenta, a frequência relativa (f) aproxima-se do valor 0.5, que é a probabilidade teórica do resultado considerado.



A possibilidade de derivar o conceito de probabilidade do conceito de frequência relativa, permite perspectivar o conceito frequencista de probabilidade como um suporte para a abordagem dos conceitos clássico, axiomático e subjectivista.

Conceitos clássico e axiomático. Das experiências do lançamento de uma moeda ao ar, podem tirar-se as seguintes conclusões: (i) o espaço amostral é definido pelos acontecimentos elementares "sair a face frente" (F) e "sair a face verso" (V), isto é, $\varnothing = \{F, V\}$; (ii) a probabilidade de cada um dos acontecimentos elementares é 0.5 e (iii) os acontecimentos elementares são independentes.

A partir das propriedades da frequência relativa, podem-se inferir os axiomas de Kolmogorov. Assim, para um acontecimento A, tem-se:

$f(A) \geq 0$ ———> $P(A) \geq 0$
$f(\Omega) = 1$ ———> $P(\Omega) = 1$
$f(A$ » $B) = f(A) + f(B)$ —>$P(A)+P(B)$,
B é incompatível com A

Conceito subjectivista. Considerem-se as duas questões seguintes:

(1) Quantas pessoas são necessárias para seleccionar, ao acaso, pelo menos duas que tenham nascido no mesmo mês (não necessariamente no mesmo ano) com uma probabilidade de 0.95? (Adapatado de Travers, 1981).

(2) Um jogador do totoloto fez três apostas no concurso desta semana. Com qual dessas apostas, indicadas abaixo, tem mais chances de ganhar um prémio?

(a) 1 2 3 4 5 6

(b) 5 13 24 25 30 42

(c) 2 17 19 25 34 39

(d) Tem as mesmas chances de ganhar um prémio com qualquer das apostas (b) e (c)

(e) Tem as mesmas chances de ganhar um prémio com qualquer das apostas (a), (b) e (c) (Fernandes, 1990).

Muitas pessoas acreditam que, no caso da primeira questão, o número de pessoas seria muito grande, o que contradiz a obtenção de um número de oito pessoas para uma probabilidade ligeiramente superior a 0.95. Na segunda questão, muitas pessoas julgam que as suas chances são maiores para as apostas (b) ou (c) comparativamente com a aposta (a), quando na verdade têm as mesmas chances de ganhar um prémio com qualquer delas.

A partir das duas questões anteriores, destaca-se o facto de os alunos possuírem ideias probabilísticas para além do conhecimento de probabilidades aceite pelos peritos, que a escola procura desenvolver nos alunos. A consideração de tais ideias é da maior importância para a aprendizagem da matemática em geral e dos conceitos probabilísticos em particular, independentemente do seu valor científico.

No caso destas ideias concordarem com o paradigma científico, elas podem constituir um ponto de partida facilitador da aprendizagem que se deseja que o aluno adquira.

No caso destas ideias conflituarem, de algum modo, com o paradigma científico, a sua consideração pode ser igualmente importante. A apoiar tal importância pode referir-se a persistência e a estabilidade de muitas dessas ideias no tempo, mesmo para além do ensino formal. É assim que, assumindo a insuficiência de um ensino visando apenas a sobreposição de conhecimentos, Konold (1988a) propôs três critérios orientadores de uma instrução efectiva: (1) "As minhas crenças concordam ou ajustam-se às crenças dos outros?", (2) "As minhas crenças são consistentes internamente?" e (3) "As minhas crenças ajustam-se às observações empíricas?". Em especial no critério (3), destaca-se o valor da perspectiva frequencista para ajudar o aluno a vencer possíveis ideias erradas.

É de notar que, nas situações apresentadas inicialmente, o recurso a um gerador de números pseudo-aleatórios de um computador poderia ser usado para simular cada uma das situações.

Organização curricular

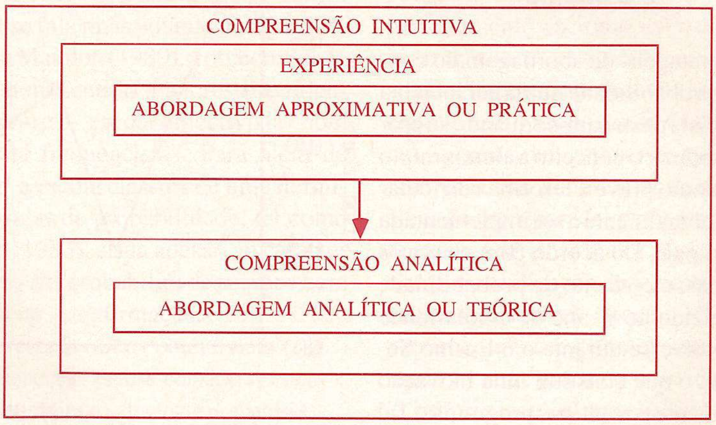
Bruner (1973) recomendou dois níveis fundamentais na compreensão de um tema: a "compreensão intuitiva" e a "compreensão analítica". No caso do pensamento analítico, o aprendiz caminha passo a passo, é capaz de explicitar esses passos, tem plena consciência da informação e das operações envolvidas e pode utilizar raciocínios cuidados e dedutivos; enquanto que, no pensamento intuitivo, o aprendiz, geralmente, não avança através de passos cuidados e bem definidos, tende a utilizar artifícios aparentemente baseados numa percepção implícita do problema total, obtém a resposta a partir de pouca ou nenhuma consciência do processo que o levou a tal resposta, raramente é capaz de fazer uma descrição completa do modo como obteve a sua resposta e, na procura da resposta, dá saltos que num processo analítico exigem verificação. A experimentação, inerente à abordagem frequencista, surge como uma estratégia para validar, de algum modo, a intuição e para aproximar o aluno da necessidade de prova analítica.

Também Glaymann e Varga (1975), corroboram este ponto de vista ao definirem três abordagens para o ensino das probabilidades: (1) *experimentação*, etapa destinada a familiarizar a criança com o tema através de uma vasta experimentação realizada a partir de múltiplas manipulações de materiais diversificados; (2) *raciocínio elementar*, etapa em que, a partir de jogos de sorte-azar, as crianças são encorajadas a comparar qualitativamente as probabilidades de certos acontecimentos e (3) *medida em probabilidade*, na qual os alunos poderão avaliar a probabilidade de certos acontecimentos com base num número suficientemente grande de experiências, partindo-se, daqui, para as noções conjuntistas de reunião, intersecção, complementação e produto car-tesiano e ligando-as à adição, subtracção e multiplicação de probabilidades.

Desta análise, quer ao nível do ensino-aprendizagem, quer ao nível do conteúdo probabilístico, pode-se sugerir, ao nível curricular, dois momentos para o ensino-aprendizagem do tema de probabilidades: no primeiro momento, tratar-se-ia o conceito de uma perspectiva mais prática e aproximativa, em que seria enfatizada a análise qualitativa desse conceito; enquanto, num segundo momento, o conceito seria tratado de uma perspectiva mais teórica e analítica, realçando-se a análise quantitativa da probabilidade. O Quadro (Fernandes, 1990), a seguir apresentado, pretende sintetizar as características de cada um dos momentos especificados.

(continua p. 36)

Caracterização das duas abordagens



Evocando o trabalho recente de um conjunto de matemáticos conhecidos, Flato vai ainda mais longe, considerando que o trabalho desses matemáticos é bem um exemplo de "como da ideia preconcebida de se ser um *problem-solver* (...), se se é inelutavelmente levado a ser um *theory-maker*", fenómeno que considera novo na Matemática e que evidencia a sua unidade.

Moshé Flato continua abordando a questão da relação da Matemática com as outras ciência, muito em particular com a Física, e aspectos das influências sociais e culturais no trabalho dos matemáticos. Mas isso fica para outras **Leituras.**

Henrique M. Guimarães

[1] Flato, M. (1990). *Le pouvoir des mathématiques*. Pais: Hachette.

[2] A APM já publicou este texto traduzido no número 11 dos *cadernos de Educação Matemática* (APM: 1988)

O problema do trimestre

(continuação da p. 12)

Luis Carmelo pergunta: *Quanto tempo devem os dois agentes esperar um pelo outro para que a probabilidade do encontro seja exactamente 50%?*

Pedro Esteves avançou com uma fórmula que relaciona a probabilidade de encontro com o tempo de espera dos agentes.

Alberto Canelas, contudo, enviou-nos um estudo muito desenvolvido sobre o problema e os seus prolongamentos e variantes. Dado nos parecer de grande interesse, publicá-lo-emos no nosso próximo número.

José Paulo Viana

Vantagens pedagógicas...

(continuação da p. 30)

Referências

Bruner, J. S. (1973). *O processo da educação*. São Paulo: Companhia Editora Nacional.

Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Universidade do Minho, Braga: Dissertação de Mestrado não publicada.

Glaymann, R. J. & Varga, T. (1975). *Les probabilités à l'école*. Paris: CEDIC.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. London: Cambridge University Press.

Hawkins, A. S. & Kapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability - A psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 349-377.

Konold, C. (1983). *Conceptions of probability: Reality between a rock and a hard place*. University of Massachusetts: Dissertação de doutoramento não publicada.

Konold, C. (1988). *Understanding students' beliefs about probability*. University of Massachusetts: Artigo não publicado [A publicar em E. von Glasersfeld (Ed.), *Constructivism in mathematics education*].

Matalon, B. (1980). Epistemologia das probabilidades. In J. Piaget (Ed.), *Lógica e conhecimento científico*. Porto: Livraria Civilização-Editora.

Ministério da Educação (1991). *Programa experimental de Matemática* (3° ciclo do ensino básico, ensino secundário e Métodos Quantitativos). Lisboa: Ministério da Educação.

Orton, R. E. (1988). Using subjective probability to introduce probability concepts. *School Science and Mathematics*, 88(2), 105-112.

Sebastião e Silva, J. (1975). *Curso complementar do ensino secundário*-1° vol., 2° tomo. Lisboa: GEP.

Travers, K. J. (1981). Using Monte Carlo methods to teach probability and statistics. In A. P. Shulte e J. R. Smart (Eds), *Teaching statistics and probability* [Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics]. Reston: NCTM.

Ventsel, H. (1973). *Théorie des probabilités*. Moscou: Éditions MIR.

José A. Fernandes
Conceição Almeida
Instituto de Educação da Universidade do Minho