Aparecimento dos números negativos e dos complexos a partir da resolução de equações

José Orlando Freitas

Se pensarmos qual o número que satisfaz a equação $x+1=0$, virá $x=-1$. Só com Albert Girard, em 1629, se aceitaram os números negativos como soluções de equações. Este matemático afirmava: "O número negativo em geometria indica um recuo enquanto o positivo indica um avanço." Até Descartes desconfiava destes números, nunca os utilizando na geometria (evitando-os) e chegando a escrever em 1637: "Muitas vezes acontece que as soluções são impossíveis ou inferiores a zero."

Se pensarmos numa solução da equação $x^2+1=0$, será um número ainda mais monstruoso. Podemos pensar em $\sqrt{-1}$ como solução da equação anterior; Euler foi o primeiro matemático a representar $\sqrt{-1}$ por i. Mas, segundo reza a história, o aparecimento dos números complexos deve mais às equações do 3º grau do que às de 2º grau, como poderemos ver já de seguida.

Em 1545 Geronimo Cardano, um matemático e filósofo italiano, publicou um livro intitulado *Ars Magna* (traduzido em inglês por *The Great Art*), no qual descreve um método algébrico para resolver equações do 3º e 4º graus. Foi por esta altura que pela primeira vez a raíz de um negativo surgiu.

Qualquer equação do 3º grau é transformada facilmente numa do tipo $x^3=ax+b$. A solução de Cardano é

$$x=\sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Esta última fórmula é conhecida como Fórmula de Cardano, embora descoberta por Tartaglia (ver *Jornal de Matemática Elementar* nº 107).

Quando esta fórmula é aplicada à equação $x^3=15x+4$, esta fornece o valor $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Cardano afirmava que a "sua" fórmula era inaplicável neste caso.

Para $x^2+1=0$ não existe solução real, para $x^3=15x+4$ podemos, por inspecção, verificar que $x=4$ é uma solução real; de facto, as duas outras raízes também são reais: $-2\pm\sqrt{3}$.

O problema foi resolvido pelo engenheiro hidráulico Rafael Bombelli, cerca de trinta anos depois da publicação da obra de Cardano. Bombelli fez a "feliz conjectura" de que, como os números $2+\sqrt{-121}$ e $2-\sqrt{-121}$ diferem apenas num sinal, o mesmo deveria ser verdade na verdadeira raíz cúbica. Assim, fez

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+\sqrt{-b}$$

e $$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=a-\sqrt{-b}.$$

Aplicou a àlgebra, chegando a $a=2$ e $b=-1$, e mostrando que

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=$$
$$=\left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right)=4.$$

"Bombelli, com esta excelente ideia, deu significado ao *significado*. Este acontecimento assinala o nascimento dos números complexos". (Israel Kleiner, 1988)

Para resolver os aparentes paradoxos das equações cúbicas exemplificadas por este tipo de equações, Bombelli desenvolveu um conjunto de regras com números complexos. As suas regras, na nossa notação, são

Geronimo Cardano (1501-1576)

$$(\pm1)i=\pm i$$
$$(\pm1)(-i)=\mp i$$
$$(+i)(+i)=-1$$
$$(-i)(+i)=1$$
$$(+i)(-i)=1$$
$$(-i)(-i)=-1$$

Também considerou exemplos envolvendo adição e multiplicação de complexos, tais como $8i+(-5i)=+3i$ e

$$\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{2i}}\right)\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8i}}\right)=\sqrt[3]{8+11\sqrt{2i}}.$$

Bibliografia:

Abrantes, Paulo. (1989). *O Novo M7* Lisboa: Texto Editora.

Kleiner, Israel. (1988). *The story of complex numbers*. Mathematics Teacher 81-7. 583-592.

José Orlando Freitas
Esc. Sec. do Funchal