O problema do trimestre

Sobre as respostas ao problema anterior

O problema do trimestre proposto no número anterior de "Educação e Matemática chamava-se "Os Finalistas do Futuro" e rezava assim:

Nas 1000^as^ Olimpíadas Intergalácticas de Jogos Matemáticos, a FIJM (Federação Intergaláctica dos Jogos Matemáticos) reparou numa particularidade curiosa do número de finalistas.

Com efeito, esse número de quatro algarismos, todos diferentes de zero, era igual à soma dos seus algarismos elevados à sua própria potência. Por exemplo 2^2, 3^3, 7^7,...

Quantos finalistas participaram nas 1000^as^ Olimpíadas?

Este problema fez parte dos quartos de final dos Campeonatos de França de Jogos Matemáticos e Lógicos, para a categoria equivalente aos alunos do ensino secundário.

Apesar do curto espaço de tempo entre a saída do número anterior da revista e a elaboração deste houve um número significativo de respostas: Helena Rocha (Lisboa), Judite Barros (Lisboa), Luis Carmelo (Tondela), Mário Gonçalves (Porto), Orlando Freitas (Funchal), Paulo Lopes (Covilhã), Pedro Esteves (Seixal) e Raul Gonçalves (Paredes). As resoluções são diferentes, embora a resposta seja a mesma, claro. Vamos utilizar aqui elementos e sugestões destes oito colegas, mas gostávamos de transcrever o início da carta de Paulo Lopes:

Comecei por abordar o problema pelo lado das equações, embora sabendo que por aí teria poucas hipóteses de êxito devido ao elevado número de variáveis(...):

$$1000a + 100b + 10c + d =$$
$$= a^a + b^b + c^c + d^d$$

Depois pensei Não sei por onde começar, *pois começar pela equação não era propriamente começar.*"

Realmente, para limitar a pesquisa dos números, é preciso impor algumas restrições. Foi o que todos fizeram.

1) Nenhum dos algarismos que formam o número pode ser 6, 7, 8 ou 9. Como $6^6 = 46656$, se o número contivesse um algarismo igual ou maior a 6, não poderia ter apenas quatro algarismos.

2) Existe um e um só algarismo 5. Se não houvesse nenhum 5, a maior soma definida no enunciado correspondia ao número 4444 e era de $4^4+4^4+4^4+4^4=1024$, muito inferior ao necessário. Se houvesse dois "cincos", a menor soma correspondia aos algarismos 5, 5, 1 e 1 e era de $5^5+5^5+1^1+1^1=6252$. O número teria então de incluir um algarismo maior que o 5 (impossível, como já se viu).

3) O algarismo dos milhares é obrigatoriamente 3. Com efeito, o número procurado é maior que $5^5=3125$ e menor que $5^5+4^4+4^4+4^4=3893$.

Agora, os casos ainda possíveis são poucos e fáceis de analisar. Sabemos que existe pelo menos um 3, existe um único 5 e os restantes algarismos são inferiores a 5 e diferentes de 0.

Algarismos	Soma
3-5-1-1	3154
3-5-2-1	3157
3-5-2-2	3160
3-5-3-1	3180
3-5-3-2	3183
3-5-3-3	3206
3-5-4-1	3409
3-5-4-2	3412
3-5-4-3	3435
3-5-4-4	3664

Manifestamente, a única solução possível corresponde aos algarismos 3-5-4-3 e o número procurado é 3435.

José Paulo Viana

Problema proposto

ENCONTRO NA PRAÇA VERMELHA

Dois agentes secretos têm um encontro marcado para um certo dia de Outubro na Praça Vermelha. Com receio de uma possível actuação da contra espionagem, tomaram as seguintes medidas de precaução:

— Cada um deles chega à praça num momento escolhido ao acaso, entre o meio-dia e a uma hora da tarde.

— Nenhum deles espera mais do que 15 minutos pelo outro.

Qual é a probabilidade de o encontro realmente se efectuar?