A folha de cálculo e a trigonometria em actividades de aplicação e modelação

Conceição Mesquita
Filomena Marques
Susana Carreira

"O que eu mais gostei nas aulas de trigonometria foram os problemas e as actividades dadas, que nos fizeram pensar de outra maneira para a resolução das questões propostas. Gostei também do facto de aprendermos esta matéria nos computadores, pois eu adoro computadores, e são raras as vezes que tenho a oportunidade de mexer ou trabalhar com um."

Organização e desenvolvimento da experiência

No 3º período lectivo de 1990/91 desenvolvemos um projecto de trabalho com duas turmas do 10º ano de escolaridade da Escola Secundária de Rio de Mouro, visando o tratamento da trigonometria num contexto de actividades de aplicação e modelação exploradas com o recurso à folha de cálculo.

Os alunos organizaram-se em grupos de 3 ou 4 elementos, o que correspondeu à constituição de 8 grupos em cada turma. Em cada grupo foi escolhido um elemento que funcionou como "representante do grupo" e que teve uma formação adicional em folha de cálculo, dada pela professora da turma, por forma a poder ajudar os colegas em questões de carácter técnico.

O projecto de trabalho foi concebido de modo a combinar dois tipos de aulas: (a) aulas de apresentação de conceitos, de resolução de fichas de exercícios e problemas clássicos de trigonometria, que tiveram lugar na sala de aula habitual; (b) aulas destinadas à realização de actividades com uma forte componente de aplicação e modelação, em que os alunos usaram o computador, concretamente a folha de cálculo, para a resolução das questões propostas. Estas aulas decorreram na sala de computadores do Projecto MINERVA, onde estiveram disponíveis oito computadores e uma impressora.

Cada uma das actividades de aplicação e modelação envolveu, em média, três aulas. No final de cada actividade, os grupos apresentaram relatórios sobre o trabalho desenvolvido com os computadores. No total, o tempo gasto em aulas com computadores foi sensivelmente igual ao tempo dispendido nas aulas sem computadores.

No início da experiência foi distribuída a cada um dos grupos uma pasta contendo a calendarização das aulas (com e sem computadores), um plano de orientação para a elaboração dos relatórios e um guião de apoio à utilização da folha de cálculo com os comandos principais.

O tipo de actividades introduzidas

No decurso da experiência foram introduzidas 4 actividades numa das turmas e apenas 3 destas actividades na outra turma, por insuficiência de tempo.

As actividades tiveram como ponto de partida uma situação extra-matemática e focaram questões como a construção de uma embalagem de sais de banho, os hipotéticos lançamentos de um pescador à beira-mar, um passeio na roda gigante da feira popular e o fenómeno acústico da produção de batimentos.

O formato das actividades corresponde à seguinte estrutura:

(a) Uma *introdução* em que é descrita uma situação extra-matemática, muitas vezes simplificada — por forma a que o seu tratamento se torne acessível aos alunos — onde são fornecidos dados que têm de ser filtrados e interpretados.

(b) Um *conjunto de questões* directamente relacionadas com a situação apresentada e que constituem suportes para o desenvolvimento de processos de modelação e aplicação de conceitos e métodos matemáticos.

Embora seguindo este tipo de esquema geral, as várias actividades apresentaram algumas diferenças no que concerne ao tipo de situação a tratar, à forma de exploração sugerida, aos processos de modelação induzidos e aos conhecimentos de Matemática envolvidos na sua resolução. As duas primeiras actividades incidiram sobre a utilização de razões trigonométricas definidas em triângulos rectângulos, a terceira envolveu o círculo trigonométrico e as funções circulares seno e coseno, e a quarta teve a ver com a variação de parâmetros em funções sinusoidais e respectivos efeitos gráficos, além de incluir noções como as de período e frequência e ainda a adição de funções trigonométricas. Neste artigo, optámos por seleccionar a segunda actividade (que a seguir se apresenta ligeiramente encurtada)[1] com vista à ilustração de alguns dos resultados e conclusões retirados desta experiência.

Em cada uma das actividades realizadas, os alunos tiveram à sua disposição a folha de cálculo, que puderam utilizar sempre que julgaram necessário e da forma que acharam mais adequada.

ACTIVIDADE A2

Há coisas que não é preciso saber para se poder ir à pesca, mas que podem perceber-se enquanto se espera que o peixe morda o anzol. Imagine-se, por exemplo, um pescador à beira-mar fazendo sucessivos lançamentos com a sua cana de pesca. De cada vez, ele vai tentando atirar o anzol para mais longe. Ao terminar cada lançamento, enterra a extremidade inferior da cana na areia, de modo que fique bem direita, e senta-se à espera. Enquanto espera, porém, repara que o ângulo formado pelo fio de pesca esticado e pela cana, vai aumentando nos sucessivos lançamentos. O mar está calmo e não há vento. A cana tem 3 metros de comprimento.

QUESTÕES

A) Esboça um esquema onde apareçam representados os sucessivos lançamentos do pescador.

B) Que relação haverá entre o ângulo observado pelo pescador e o comprimento de linha que se estende desde a ponta da cana até à superfície da água?

C) Que relação haverá entre o mesmo ângulo e a distância entre a cana e o ponto em que a linha de pesca entra na água?

D) Constrói um gráfico que represente a variação do comprimento de linha que vai da ponta da cana até à água, à medida que o ângulo atrás referido varia desde o seu valor mínimo até ao seu máximo.

E) Constrói um gráfico que mostre a variação da distância que o lançamento atinge sobre a água, com o mesmo ângulo.

F) O que podes concluir da comparação entre os dois gráficos?

G) Determina que valores poderá ter o ângulo se o comprimento de linha esticada for superior a 6 metros.

H) Qual será a amplitude do ângulo se o pescador conseguir fazer um lançamento que tenha um alcance de 20 metros?

Os processos desenvolvidos pelos alunos na Actividade A2

A descrição das estratégias e procedimentos dos alunos tem por base a observação de um dos grupos ao longo das várias aulas dedicadas a esta actividade e a análise do trabalho que estes apresentaram sob a forma de um relatório, no final da actividade.

A primeira iniciativa tomada pelo grupo consistiu na elaboração de um esquema ilustrativo da situação descrita. Assim, os alunos fizeram um pequeno esboço no papel em que representaram três lançamentos sucessivos do pescador, fazendo variar a inclinação do fio de pesca.

Os alunos passaram então à análise da forma de variação do comprimento do fio e do alcance em função do ângulo α. Observando o esquema construído, rapidamente concluíram que quanto maior fosse o ângulo, maior seria o comprimento do fio e o alcance. Discutiram depois as amplitudes que o referido ângulo poderia ter para que fosse possível um lançamento. Depressa observaram que o ângulo nunca poderia ser de 90°. Além disso, concluíram que também era de excluir o ângulo de 0°, pois, nessas condições, não teria havido lançamento. (Veja-se o extracto do relatório apresentado pelos alunos que reproduzimos na página seguinte).

Quando resolveram representar graficamente a variação do comprimento do fio em função do ângulo de lançamento, os alunos acharam que seria útil recorrer à folha de cálculo. A primeira ideia avançada foi a de criar uma coluna de valores para o comprimento do fio. Uma das alunas referiu que podiam determinar o alcance a partir destes valores, através do Teorema de Pitágoras (uma vez que a altura da cana era conhecida) e acrescentou que tinham possibilidades de calcular o ângulo de lançamento a partir desses dados. Note-se que os alunos já tinham conhecimento da existência das funções trigonométricas inversas na folha de cálculo, embora estas não tivessem sido estudadas previamente. Porém, depois de discutirem esta hipótese, os alunos acabaram por abandoná-la. Um deles propôs uma nova estratégia: "Vamos antes dar valores ao ângulo, achar o seno ou o coseno e depois daí determinamos o comprimento ou o alcance". O mesmo aluno argumentou da seguinte forma a favor da sua proposta: "As distâncias podem ser muito grandes, não se sabe. Ao passo que o ângulo sabe-se que está compreendido entre 0 e 90".

Ao determinarem a fórmula para a determinação do comprimento do fio, os alunos cometeram um erro e, depois de a terem reproduzido na folha de cálculo, ao longo da respectiva coluna, aperceberam-se da incoerência obtida. Um dos alunos teve a seguinte reacção: "Não pode ser! O comprimento do fio tem de ser menor para ângulos menores e não é isso que está a acontecer!".

Depois de examinarem a fórmula usada, os alunos aperceberam-se do seu erro e corrigiram-no rapidamente.

Feito isto, passaram à construção dos gráficos pretendidos (alcance e comprimento do fio). Acharam que estes gráficos eram muito parecidos e resolveram sobrepor as duas curvas num mesmo gráfico para poderem compará-las melhor. Uma das alunas notou, então, que num dos gráficos se observavam alguns pontos um pouco mais abaixo do que no outro. Voltando à tabela da folha de cálculo, os alunos confirmaram que os valores existentes na coluna do alcance eram menores do que os respectivos valores do comprimento do fio. Verificaram também que essa diferença se atenuava à medida que o ângulo ia aumentando. Um dos alunos formulou a seguinte conjectura: "É que até 60° vão aumentando devagar e depois a variação começa a ser muito maior e já não se nota tanto que um é maior que o outro". Para testar a sua hipótese, sugeriu que fizessem os mesmos gráficos sobrepostos, mas apenas para ângulos de amplitude inferior a 60° (isto é, restringindo o intervalo do domínio). Logo que este gráfico ficou pronto, os alunos puderam aperceber-se claramente da diferença entre as duas curvas e confirmar as hipóteses colocadas.

Por fim, pensaram na razão que justificaria o facto de uma das curvas ficar acima da outra. Ao fim de algum tempo, uma das alunas notou que o comprimento do fio correspondia à hipotenusa de um triângulo rectângulo e que o alcance correspondia a um dos seus catetos. Então obteve a resposta: "É lógico, porque o comprimento do fio é a hipotenusa e a hipotenusa é sempre maior do que os catetos".

Para além destes aspectos, os alunos trabalharam de uma forma muito interessante nas questões que pressupunham a determinação dos ângulos correspondentes a determinados valores do comprimento do fio ou do alcance. É de referir que, nesta fase, os alunos ainda não tinham tido um ensino explícito do método de resolução de equações ou inequações envolvendo expressões trigonométricas. Assim, por exemplo, na questão que pedia a determinação do ângulo correspondente a um alcance de 20 metros, os alunos começaram por procurar o valor 20 na coluna relativa à distância **d**. Depressa verificaram, contudo, que esse valor não aparecia na tabela. Observaram, entretanto, que surgiam dois valores próximos de 20, um menor e outro maior do que 20. Encontraram nas células correspondentes da coluna dos ângulos os valores 81 e 82. Consideraram, desse modo, que o ângulo estaria entre 81° e 82°. No entanto, quiseram saber o valor exacto do ângulo e decidiram obtê-lo na folha de cálculo. Fazendo o quociente entre o alcance (20) e a altura da cana (3), ficaram na posse do valor da tangente do ângulo desejado. Numa célula à parte introduziram esse valor e numa outra usaram a função "ATAN" (arc tg) da folha de cálculo para chegarem à amplitude do ângulo em radianos, que depois converteram em graus. Deste modo, concluíram que o ângulo desejado era de 81,5°.

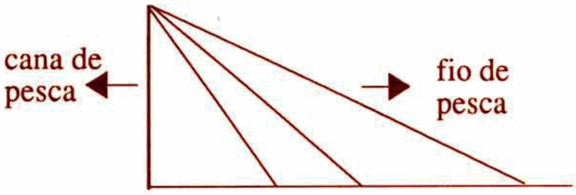
Algumas reacções dos alunos à experiência realizada

As opiniões dos alunos de ambas as turmas acerca da experiência vivida nas aulas de trigonometria foram recolhidas através de um inquérito que focou um conjunto de perspectivas de avaliação do trabalho realizado. Dada a limitação de espaço, faremos, neste artigo, uma breve referência às respostas dos alunos sobre os aspectos que consideraram mais positivos e os aspectos que sentiram menos conseguidos.

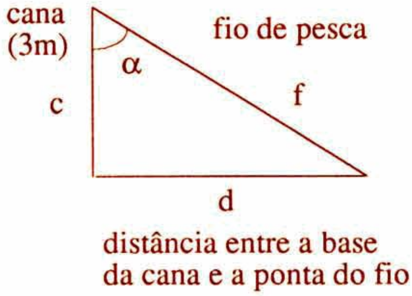
As respostas mais pessimistas foram dadas por dois alunos que declararam unicamente não gostarem de trigonometria, sem fazerem uma avaliação explícita das aulas. Houve ainda o caso de um aluno que classificou as aulas de "um pouco chatas", embora admitindo que tinha aprendido coisas novas.

No que diz respeito aos aspectos considerados mais negativos pelos alunos, a questão da necessidade de mais tempo foi muito referida. Além disso, houve alunos que acharam demasiadas, tanto as aulas que envolveram computadores como as actividades propostas. As respostas seguintes ilustram estas opiniões:

> "Em geral gostei da maneira como foram elaboradas as aulas, especialmente as do computador, pois prenderam-nos mais à trigonometria, não a vendo como aborrecida. É pena, como já referi, o factor tempo não ter ajudado. Contudo, penso que as aulas foram dadas de



"Pensámos ser melhor fazer um 'esquema' para tentar uma melhor compreensão.



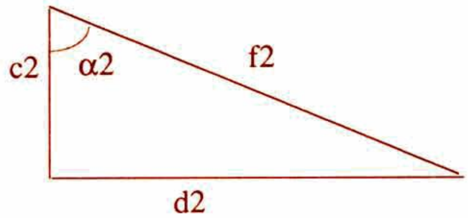
Após uma breve reflexão, concluímos que quanto maior for o ângulo, maior é o comprimento do fio e, é claro, maior é a distância entre a base da cana e a ponta do fio.

Se o ângulo aumentar, é possível ver que:

$\alpha 2 > \alpha 1 \Rightarrow f2 > f1 \wedge d2 > d1$

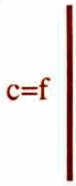
ou seja:

$> \alpha \Rightarrow \ >$ comp. fio $\wedge$ $>$distância



É preciso, desde o princípio, pensar nos valores em que o ângulo pode estar compreendido. Concluímos que:

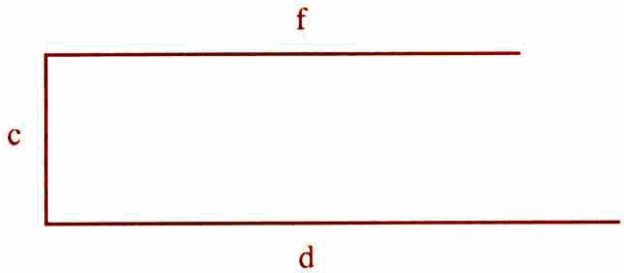
Se o ângulo for igual a 0°:



O fio vai ficar paralelo à cana, ou seja, a distância entre a base da cana e a ponta do fio seria igual a zero. Não é possível!!!

Se o ângulo for igual a 90°:

É igualmente impossível, dado que o comprimento do fio e a distância alcançada seriam infinitos.



Então o valor do ângulo pode estar contido nos seguintes valores:]0°,90°[."

Excerto do relatório de um dos grupos acerca da variação do comprimento do fio e do alcance em função do ângulo

acordo com o possível, e melhor do que isso, penso que era impossível."

"Concordo que tivemos uma grande sorte relativamente à utilização do computador, pois as aulas teóricas tornam-se, por vezes, demasiado monótonas. No entanto, também realizámos demasiadas actividades o que provocou um excesso de trabalho. Pode-se porém concluir que se pode continuar com estas actividades com diversas turmas."

Em relação aos aspectos julgados positivos na experiência realizada, distinguem-se duas tendências de opinião dos alunos:

1. Houve uma clara preferência pelas aulas que envolveram o computador.

Surgiram várias formas de exprimir esta preferência. Alguns alunos declararam sentir-se entusiasmados pelo uso desta ferramenta; outros, referiram o computador como um elemento de inovação, achando que quebrava a rotina das aulas de Matemática, que contribuía para aumentar o interesse pelo trabalho a desenvolver, que criava um ambiente de aprendizagem mais favorável e, finalmente, que levava a desenvolver o gosto pela trigonometria.

Por exemplo, um dos alunos declarou:

"Foram as aulas do computador que me agradaram mais. A parte de desenvolver o programa e o resultado (gráfico) foram as partes melhores da aula. Isto tudo com a cooperação do grupo e o ambiente da aula estava um 'espectáculo'. As aulas sem computador foram boas. A matéria estava bem dada, com bastante sentido, etc. A matéria encaixava de uma aula de computadores para uma aula sem computadores. Nas aulas teóricas a matéria que dávamos era precisa para a aula de computadores."

2. As actividades de aplicação e modelação propostas constituíram um dos aspectos positivos da experiência.

Um aspecto a salientar foi o facto de os alunos terem sentido que as actividades os levaram a pensar de outra maneira, a raciocinar e a descobrir uma outra dimensão da Matemática. Vejam-se, também neste caso, as respostas dadas por alguns alunos:

"O que eu mais gostei nas aulas de trigonometria foram os problemas e as actividades dadas, que nos fizeram pensar de outra maneira para a resolução das questões propostas. Gostei também do facto de aprendermos esta matéria nos computadores, pois eu adoro computadores, e são raras as vezes que tenho a oportunidade de mexer ou trabalhar com um."

"Agradou-me a resolução das actividades, visto que foi-nos dada uma outra 'dimensão' para ultrapassarmos as questões. Ou seja, aprendemos o programa de outra forma."

"Gostei bastante dos temas originais atribuídos a cada actividade, porque são temas realistas e que nos fizeram pensar. Porque eu conhecia aquelas situações, mas nunca imaginei o que podia saber sobre elas. Em suma, gostei."

Conclusões retiradas do trabalho desenvolvido

O trabalho realizado nas duas turmas forneceu dados que permitem analisar algumas das implicações da introdução de actividades de aplicação e modelação no currículo e, em particular, no domínio da trigonometria.

Algumas dessas implicações reportam-se ao tipo de processos de raciocínio e de estruturação de conceitos que estão envolvidos na realização das referidas actividades. Mencionaremos aqui apenas alguns dos efeitos observados ao longo da experiência.

Um dos processos que se revelou dominante em todas as actividades realizadas foi a identificação de variáveis e o estabelecimento de relações entre estas. De facto, os alunos foram capazes de reconhecer variáveis e parâmetros nos problemas tratados, de perceber intuitivamente a forma como estes interagiam e, por fim, de exprimir matematicamente tais relações. As situações problemáticas usadas implicaram a necessidade de distinguir variáveis dependentes e independentes e, em muitos casos, exigiram a manipulação de um elevado número de variáveis. Uma das razões que poderá explicar a forma como os alunos trabalharam estes aspectos poderá estar na atribuição de um significado concreto a cada uma das variáveis. É de facto presumível que os alunos, na presença de um contexto real, reconheçam mais facilmente a existência de variáveis quantificáveis e que sejam levados a formular juízos do tipo: "isto depende daquilo...", "a variação vai ser desta forma...", "nunca poderão ocorrer valores negativos para esta grandeza...", etc.. Por outro lado, a atribuição de significados reais aos resultados matemáticos produzidos suscitou a sua frequente avaliação, por parte dos alunos. Eles foram levados a comparar os resultados obtidos com as suas previsões e conhecimentos acerca da situação real e, por vezes, o reconhecimento de contradições entre os resultados matemáticos e a realidade conduziu à reformulação dos modelos matemáticos construídos.

As actividades propostas permitiram, não só a aplicação de conhecimentos de trigonometria previamente adquiridos, como deram ocasião à introdução de novos conceitos. Relativamente aos novos conceitos, devem ser mencionadas as funções trigonométricas inversas, arc sen, arc cos e arc tg, a que os alunos tiveram acesso por via da utilização da folha de cálculo. Este acesso, permitiu-lhes, nomeadamente, a descoberta de procedimentos alternativos para a resolução de equações e inequações trigonométricas, apoiados na análise de tabelas obtidas na folha de cálculo. Os conceitos de ciclo, frequência, amplitude e período de funções circulares foram também relacionados com determinados parâmetros presentes nas expressões analíticas das funções trigonométricas estudadas. Por último, foram abordadas as operações com funções trigonométricas, em particular, a adição de funções sinusoidais, e as transformações geométricas do gráfico da função seno correspondentes à adição e multiplicação de coeficientes na sua expressão analítica.

Outro aspecto a considerar tem a ver com o modo como os alunos utilizaram o círculo trigonométrico. Por exemplo, isto foi patente em determinadas actividades em que os alunos relacionaram trajectórias e movimentos circulares com o círculo trigonométrico. Assim, associaram a posição de um móvel em movimento circular uniforme às funções seno e coseno, introduziram correctamente nos modelos matemáticos formulados a dimensão do raio da trajectória descrita, relacionando-a com o raio do círculo trigonométrico e com a amplitude da função seno. Estes factos tornam-se relevantes, porquanto é usual, no estudo da trigonometria, detectar nos alunos alguma dificuldade em integrarem o círculo trigonométrico nos seus raciocínios.

Quanto à utilização da folha de cálculo, é de registar a forma como possibilitou e estimulou a manipulação de múltiplas representações matemáticas. Não só foram inúmeras as representações numéricas, algébricas e gráficas criadas na folha de cálculo, como se registaram diversas conexões entre aspectos matemáticos e extra-matemáticos das situações propostas. Em geral, a ocorrência de transferências entre vários sistemas de representação, nos processos de resolução dos alunos, contribuiu para uma eficaz monitorização dos seus resultados. O cruzamento das informações colhidas em diferentes representações (tabela, gráfico, fórmula, esquema geométrico) permitiu-lhes, em muitos casos, controlar a validade dos seus raciocínios e conjecturas e obter *feedback* acerca dos seus modelos matemáticos.

Finalmente, há a referir a questão do tempo e da dimensão das actividades. Na literatura sobre este tema, uma ideia que surge com frequência é a de que as actividades de aplicação e modelação requerem um maior consumo de tempo. A experiência que realizámos parece não ter fugido a esta tendência geral. No entanto, há que ter em conta que o contacto regular dos alunos com determinadas perspectivas de trabalho contribui para um aumento do seu rendimento, podendo vir a atenuar o consumo de tempo.

[1] A actividade incluía ainda duas outras questões que diziam respeito à leitura e interpretação de gráficos fornecidos. Por limitações de espaço, optámos por retirar essas duas questões, que embora tendo suscitado uma discussão animada, têm uma natureza diferente das restantes questões.

Conceição Mesquita
Filomena Marques
E. S. de Rio de Mouro
Susana Carreira
FCT - Univ. Nova de Lisboa

III Seminário de Investigação em Educação Matemática (APM)

António Domingos

Decorreu nos passados dias 2 e 3 de Novembro de 1992 na Escola Superior de Educação de Viseu o III Seminário de Investigação em Educação Matemática organizado pelo Grupo de Trabalho sobre Investigação em Educação Matemática da APM. Com este seminário pretendeu-se fundamentalmente estimular a produção de novo conhecimento científico na área da Educação Matemática criando um espaço de comunicação que contou com a participação de cerca de oitenta docentes de Universidades, Escolas Superiores de Educação, investigadores de outros organismos e professores.

Em ambos os dias os trabalhos foram iniciados por uma sessão plenária. No primeiro dia esta sessão foi proferida pela professora Terezinha Nunes da University of London subordinada ao tema "A Matemática na vida diária — mantendo as coisas nas devidas proporções" que incidiu sobre uma investigação acerca de um problema de proporcionalidades realizado com pessoas escolarizadas e sem escolarização. Ainda durante a manhã decorreu um espaço de comunicações onde foram apresentadas três comunicações subordinadas aos temas: Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular, Leonor Cunha Leal da ESE de Setúbal; Construção e exploração de modelos matemáticos em situações do mundo real envolvendo Trigonometria, Susana Carreira da E. Sec. Mem Martins; e Concepções dos professores do 1º Ciclo relativamente à Matemática e práticas da sala de aula, Maria de Lurdes Serrazina, ESE de Lisboa.

Na parte da tarde decorreram mais três espaços de comunicação onde foram apresentadas as comunicações seguintes: Matemática e individualidade — contribuição à compreensão da hipercomplexidade da pessoa em aprendizagem da Matemática, António Jorge Andrade da FCT-UNL; Desenvolvimento de um teste de avaliação diagnóstico em Matemática, Isolina Oliveira e Maria Judith Pereira do IIE; Uma investigação experimental sobre as capacidades de resolução de problemas que envolvem a multiplicação, Peter Bryant da University of Oxford e Luisa Morgado da FPCE-Univ.Coimbra; Insucesso em Matemática — fenómeno irreversível? Reflexões sobre uma abordagem em Hypercard, Isabel Cabrita do Dp.DTE da Univ.Aveiro; A experimentação do novo programa de Matemática de 11º ano: Um estudo de caso, João Filipe Matos, João Pedro Ponte, Henrique Guimarães e Ana Paula Teixeira Canavarro da FCL e Leonor Cunha Leal da ESE de Setúbal; Modelos cognitivos associados ao conceito de ângulo, José Manuel Matos da FCT-UNL.

No final do primeiro dia foi ainda reservado um espaço de tempo destinado à apresentação dos vários grupos profissionais por forma a que todos os presentes pudessem ficar a par das suas realizações, publicações e possíveis contactos.

No segundo dia a sessão plenária foi proferida pelo professor Juan Díaz Godino da Universidad de Granada e subordinada ao tema: "Paradigmas, problemas y metodologias en Didáctica de la Matemática que discutiu diversas fundamentações teóricas para a Didáctica da Matemática.

Ainda durante a manhã houve mais dois espaços de comunicação cujos temas foram: Conjecturas e provas informais em Geometria com recurso a ferra-

(continua na pág. 14)