Paradoxos geométricos, a sucessão de Fibonacci e o que mais se verá...

Paulo Oliveira

São estes velhos e amáveis
paradoxos que fazem rir os
bobos na taberna.

Desdémona, Otelo (acto II, cena 1)

Um dos mais antigos teoremas sobre números de Fibonacci deve-se ao astrónomo francês Jean-Dominique Cassini (1680) e estabelece que:

$$F_{n+1} \times F_{n-1} - F_n^{\,2} = (-1)^n \,, \forall n > 0$$

em que F_n designa o número de Fibonacci de ordem n. A demonstração desta propriedade pode fazer-se, por exemplo, por indução.

A identidade de Cassini está na base de um paradoxo geométrico atribuido a Lewis Carrol ou Sam Loyd, conforme as fontes. A ideia consiste em cortar um quadriculado de 8 $\times$8 de modo conveniente (ver fig.1) e reorganizar as partes obtidas para constituirem um rectângulo (fig. 2).

A área inicial de 8 $\times$8 = 64 quadrados transformou-se, pela reorganização das partes, numa área de 5 $\times$13 = 65 quadrados !!!

Noutra versão deste paradoxo, da autoria de Sam Loyd Jr.,a reorganização das partes conduz à fig. 3.

Neste caso, a área inicial converteu-se em 5x6+5x6+3 = 63 quadrados. Quer dizer, no primeiro caso a área aumentou de uma "unidade" e no segundo diminuiu da mesma quantidade !!

Vejamos como se pode "demonstrar" recuperando o primeiro procedimento mas em termos mais genéricos.

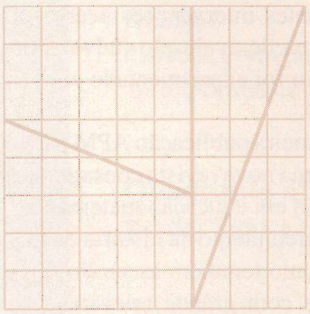

fig. 1

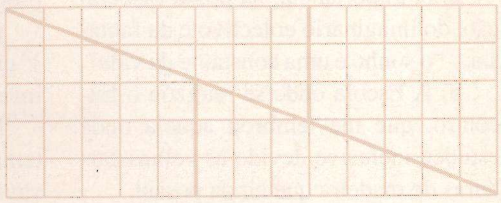

fig. 2

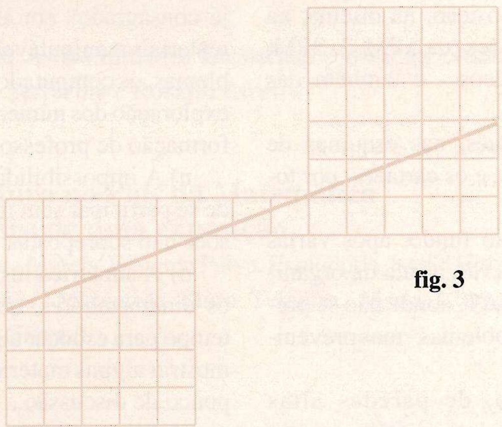

fig. 3

Seja, pois, um quadrado de lado F_n. Cortemo-lo em quatro partes e reorganizemo-las como anteriormente (fig. 4 e 5) de modo a constituirem um rectângulo. Ora o rectângulo (fig. 5) tem de área

$$F_{n-1} \times (F_{n-1} + F_n) = F_{n-1} \times F_{n+1}$$

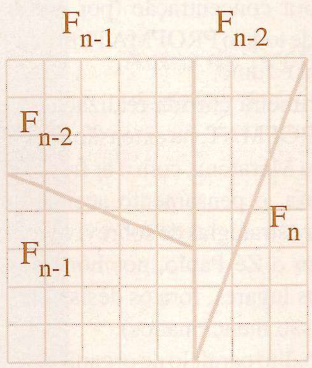

fig. 4

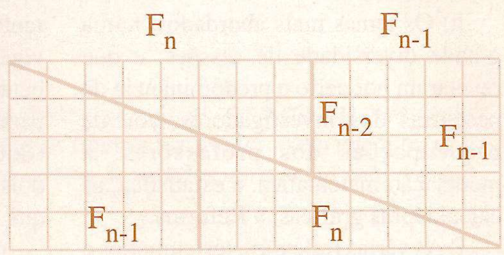

fig. 5

Como, pela identidade de Cassini,

$$F_{n-1} \times F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$$

ganha-se ou perde-se uma unidade de área, relativamente à área do quadrado, dependendo de n ser par ou impar respectivamente.

O paradoxo de Carrol-Loyd é susceptível de uma interpretação intuitiva em termos estritamente geométricos. De facto se se fizerem as construções mencionadas, em papel milimétrico, torna-se "evidente" que a linha "diagonal" que aparece depois de reorganizadas as quatro partes, não é uma linha recta:

- ou as partes sobrepõem-se ao longo da linha (diminuição da área);
- ou as partes não se ajustam completamente (aumento da área).

Existem muitos outros paradoxos aparentados com este, isto é, em que aparentemente há variação da área de uma figura qundo se altera a disposição das partes em que se divide a figura inicial. Martin Gardner discerniu que o princípio subjacente a todos eles é o mesmo. Denominou-o princípio da distribuição oculta pois em qualquer deles há uma distribuição imperceptível de uma certa porção de área.

Vejamos um outro exemplo de um paradoxo deste tipo. Tomemos um rectângulo e representemos 10 segmentos de recta equidistantes dois a dois e de igual comprimento (fig. 6).

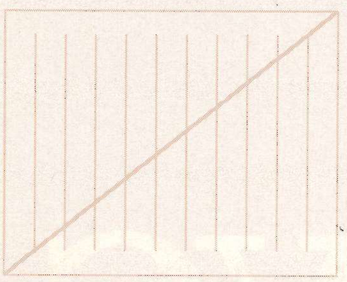

fig. 6

Fazendo um corte por uma das diagonais do rectângulo e deslocando as duas partes ao longo da diagonal, como mostra a fig. 7, o que se obterá?

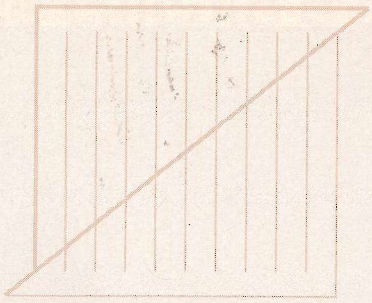

fig. 7

Dos 10 segmentos de recta iniciais restam apenas 9, sendo a soma dos seus comprimentos igual à soma dos dez iniciais!

O que aconteceu? Bom, dos 10 segmentos iniciais, 8 estão divididos em duas partes pela diagonal.. Ora, o realinhamento, pela deslocação das partes, produziu 9 segmentos cada um dos quais maior do que anteriormente. Quer dizer, o segmento desaparecido distribuiu-se de modo imperceptível pelos outros 9, aumentando ligeiramente o comprimento de cada um!

Estes exemplos ilustram quanto se pode aprender com os paradoxos, o que em si mesmo não é novidade já que o valor pedagógico dos paradoxos tem sido explorado desde a antiguidade. Euclides parece ter sido quem primeiro o fez conscientemente numa obra hoje perdida: *Pseudaria*, isto é, "Livro dos enganos". Muitíssimo afamados e não menos fertéis foram as aporias de Zenão sobre a impossibilidade do movimento e as antinomias da teoria ingénua (isto é, não axiomatizada) dos conjuntos.

Um paradoxo não deixa ninguém indiferente - causa espanto, admiração, perplexidade e uma saudável perturbação. Já Aristóteles dizia que é pela admiração que o homem começa a "filosofar". Quer dizer, o espanto intelectual convida à ponderação. E não é a reflexão factor chave no sucesso educativo?

Paulo Oliveira
Escola Secundária
Seomara da Costa Primo

Matemática na Imprensa

Calem a Barbie!

É O QUE AS feministas norte-americanas querem fazer à boneca mais famosa. Ela é melhor sem pio. Depois de 20 anos muda, a Barbie abre agora a boca para dizer parvoíces. As feministas, sempre atentas aos pormenores onde possam encontrar alguma discriminação sexual, acham que ela prejudica a luta pela igualdade. Desta vez o alvo das críticas foi uma frase em que a boneca diz: "os cursos de matemática são mais difíceis". Ora tal frase poderia criar complexos de inferioridade nas meninas quanto à sua capacidade mental, acusam. A Associação Americana de Mulheres Universitárias, formada por mais de 130 mil mulheres licenciadas, enviou uma carta ao fabricante de brinquedos, a Mattel, a pedir-lhe que retire a boneca do mercado. Resposta: "não!" Porque elas também dizem coisas positivas: "Gosto da escola", ou " quero ser veterinária". Mas o porta-voz da empresa já prometeu que as próximas gerações de bonecas não dirão a frase profana. Para já, as "barbies" continuam a vender-se por cerca de dois contos cada uma. Com pio. ■

Público, 3 de Outubro de 1992