Para este número seleccionámos

Quando e como podemos usar modelação?

Frank Swetz

Para este número, dedicado à problemática das aplicações e da modelação no ensino da Matemática, seleccionámos o artigo de Frank Swetz, publicado no Mathematics Teacher de Dezembro de 1989, em que o autor ilustra o processo de modelação a partir de exemplos concretos e discute o seu papel no ensino secundário. No final deste artigo, uma nota a registar: a modelação deveria ser incorporada gradualmente e de uma forma moderada em todos os currículos de Matemática.

Tipos de modelação

Intuitivamente, a palavra *modelo* evoca a imagem de uma entidade física. Um modelo, no sentido usual do termo é uma réplica, frequentemente numa escala menor, de algum objecto. As crianças e certos praticantes de modelismo constróem modelos de barcos e de aviões. Os seus modelos, que parecem brinquedos, exibem muitas, senão todas, as características físicas do objecto real em questão. Alguns modelos funcionam realmente de forma análoga à do objecto que imitam. Tais modelos são considerados bons se possuem a maior parte das propriedades e características do objecto que retratam.

Mas a construção de modelos não está limitada aos intuitos recreativos das crianças e dos praticantes de modelismo. Um escultor que pretende produzir uma grande estátua em pedra, pode primeiro criar uma miniatura num material mais fácil de trabalhar, como a argila ou o gesso. E quando estiver satisfeito com a sua forma, irá transferi-la e aumentá-la para o bloco de pedra a ser esculpido, através de instrumentos de medição. Os desenhadores de automóveis usam um processo do mesmo tipo na criação dos novos protótipos. Facilmente manipuláveis e podendo ser alterados quando necessário, os modelos oferecem aos seus utilizadores um certo grau de liberdade para experimentação e controlo de despesas. Em muitas situações industriais e tecnológicas, a criação e o uso de modelos nos processos de planeamento e produção são imperativos.

Nem toda a modelação tem uma natureza física. Os modelos teóricos são conjuntos de princípios ou regras que descrevem adequadamente o comportamento de um fenómeno na mente de um observador. Os economistas falam de "modelos económicos", os técnicos de planeamento populacional empregam o termo "modelos demográficos" e assim por diante. Quando os princípios de um modelo teórico têm uma base matemática, diz-se que se criou um modelo matemático. Assim, um modelo matemático é uma estrutura matemática que descreve aproximadamente as características de um fenómeno em questão. Ao processo activo de idealizar um modelo matemático chama-se *modelação matemática*.

Modelos matemáticos

Os modelos matemáticos podem assumir diversas formas. Algumas das estruturas matemáticas básicas do currículo do ensino secundário que se prestam imediatamente a situações de modelação são tabelas de dados numéricos, gráficos, equações (fórmulas), sistemas de equações ou inequações e algoritmos, incluindo os que podem estar contidos em programas de computador.

Considere a situação:

Uma engenheira que trabalha numa firma de acessórios para piscinas, é encarregada de avaliar a segurança de uma prancha de mergulho construída num novo material sintéctico. Uma das suas preocupações de segurança diz respeito ao grau de deflexão que a prancha sofre quando uma pessoa se coloca na sua extremidade livre.

Ela analisa a situação e conclui que os principais factores que afectam a deflexão D são: o peso da pessoa em

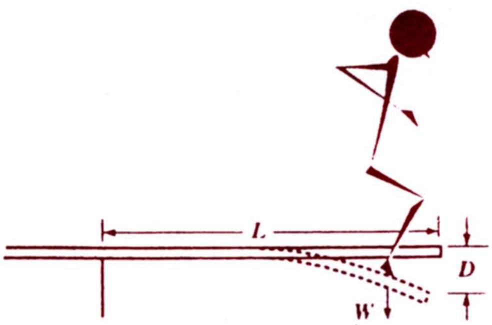


Fig. 1. Esboço do problema da prancha de mergulho

questão, W; o comprimento da prancha, L; a forma da secção transversal da prancha; e o material em que a prancha foi construída. Veja-se a figura 1.

O comprimento da prancha é standard e, portanto, fixo. O material da prancha e a área da sua secção são pré-determinados. Esta situação envolve duas variáveis, o peso e a deflexão. A dependência da deflexão em relação ao peso pode ser facilmente determinada, aplicando diferentes pesos ao extremo da prancha e registando os resultados da deflexão. A tabela numérica dos valores assim obtidos serve como um modelo da deflexão da prancha sob diferentes pesos. Se os valores forem representados num gráfico, o próprio gráfico pode servir como modelo. Os dados numéricos podem também sugerir uma relação funcional, baseada numa simples proporcionalidade entre o peso e a deflexão, ou seja:

$D = W/K$.

Por questões de conveniência, dado que a engenheira não quer construir uma prancha e carregá-la com pesos, o último modelo, uma simples equação, é o mais simples. Tentando refinar o seu modelo, a engenheira usa métodos analíticos mais avançados para calcular:

$K = 3EI/L^3$ e $D = WL^3/3EI$

em que E é o módulo da elasticidade que depende do material usado e I é o momento de inércia da área da secção transversal da prancha.

Em seguida, vamos examinar os passos inerentes ao processo de modelação:

1. Formular o problema, neste caso, os efeitos do peso na deflexão de uma prancha de mergulho.

2. Isolar os factores relevantes (W, E, I, D, L).

a) Quais são parâmetros? (E, I, L).

b) Quais são variáveis? (D, W).

3. Determinar as relações matemáticas que existem entre os factores relevantes e que são úteis para resolver o problema ($D=f(W)$).

4. Estabelecer a relação e criar um modelo ($D = W/K$).

5. Testar o modelo — determinar valores para situações conhecidas e examinar o ajustamento.

6. Refinar o modelo, como se pretendia, para obter informações mais úteis e precisas ($D=WL^3/3EI$).

No refinamento do modelo, a engenheira pode colocar várias questões. Por exemplo, "A relação será válida para todos os valores de W?"; "Será necessário que isso aconteça?". A resposta a ambas as questões é certamente não. A relação funcional entre W e D será linear apenas num domínio limitado constituído pelos valores de W que não forçam a prancha a exceder os seus limites de elasticidade. Uma vez que a prancha de mergulho em questão é alta, ficando a 10 pés acima da água, não é normalmente usada por crianças pequenas ou grandes adultos; portanto, usando a sua experiência, a engenheira pode fixar seguramente o domínio $80 \leq W \leq 300$.

Considere uma outra situação de modelação que se enquadra facilmente nas capacidades e interesses dos alunos do secundário (Sloyer, 1986):

Uma companhia de transporte de carga está a lançar um serviço expresso de helicóptero para transporte em pequenas distâncias, isto é, para deslocações inferiores a 1000 milhas. Há duas maneiras de transporte de carga no helicóptero: internamente ou externamente, suspensa do aparelho. Existem vantagens e desvantagens em ambos os métodos: externamente, o carregamento e a descarga são mais rápidos, mas durante o voo, a carga externa produz atrito, atrasando o helicóptero e aumentando o tempo de viagem. Suponha que a carga é protegida do tempo com coberturas. Quando deverão ser usados os diferentes métodos?

Um chefe de carregamento tem de encontrar o método mais económico de carregar o aparelho para viagens num raio de 1000 milhas a partir da base do helicóptero. Ele assume que os custos acarretados são directamente proporcionais ao tempo de entrega; desse modo, ele procura uma relação entre o tempo, T, e a distância da entrega, D. Identifica o problema e define as variáveis. Para prosseguir, ele precisa de alguns dados reais e, como tal, faz alguns testes usando uma carga standard. Os resultados do teste estão resumidos na tabela 1.

Tabela 1

Comparação entre carregamento interno e externo			
Método de carga	Velocidade média (milhas/hora)	Tempo (mn)	
		Carga	Descarga
Interno	144	30	20
Externo	120	15	10

A partir dos dados da tabela 1, podemos verificar que o tempo necessário para um helicóptero carregado internamente T_i, é dado por:

$$T_i = \frac{30}{60} + \frac{D}{144} + \frac{20}{60} = \frac{120 + D}{144}$$

e que o tempo necessário para um helicóptero carregado externamente, T_e, é dado por:

$$T_e = \frac{15}{60} + \frac{D}{120} + \frac{10}{60} = \frac{50 + D}{120}$$

Em seguida, o chefe de carregamento decide determinar os valores de D para os quais se tem $T_e < T_i$; então o seu modelo matemático passa a ser:

$$\frac{50 + D}{120} < \frac{120 + D}{144}$$

ou seja,

$$60 + 12D < 1200 + 10D$$

donde,

$D < 300$ milhas

Assim, para viagens inferiores a 300 milhas, o carregamento externo é preferível, ao passo que o carregamento interno deverá ser usado para viagens que excedam as 300 milhas. E em relação às viagens que sejam exactamente de 300 milhas? Ele refina o seu modelo, testando a situação das 300 milhas na expressão para T_i e para T_e:

$$T_i = \frac{120 + 300}{144} = 2.9h$$

$$T_e = \frac{50 + 300}{120} = 2.9h$$

Ti = Te quando D = 300 milhas, mas uma vez que o carregamento e o descarregamento externos são mais rápidos, o chefe decide usar a carga externa para viagens que requeiram exactamente 300 milhas. Com base nos resultados destes modelos, o esquema de carga é definido da seguinte forma:

$0 < D \leq 300$ — usar a carga externa para reduzir as despesas de transporte

$300 < D \leq 1000$ — usar a carga interna para reduzir as despesas de transporte.

Porquê a modelação no currículo?

Um objectivo fundamental do ensino da Matemática é preparar os jovens para actuarem de forma conhecedora e confiante em situações problemáticas do mundo real. A modelação matemática é uma forma privilegiada de resolução de problemas do mundo real. Coloca em acção uma variedade de capacidades matemáticas e força a atenção sobre o problema como um todo, e não sobre uma solução única. Quem resolve o problema é compelido a definir e clarificar o problema com cuidado. Através da compreensão do problema o método para obter a solução é revelado.

A modelação é uma forma especialmente compreensível de resolução de problemas. Normalmente, um modelo não fornece uma resposta específica, mas antes um conjunto de respostas que descrevem um certo fenómeno. A compreensão adquire uma natureza dinâmica e activa em vez de estática e passiva. Quem constrói o modelo experimenta uma sensação de participação e controlo no processo de solução. Os modelos podem ser manipulados matematicamente, modificando variáveis e parâmetros. Por exemplo, no problema da prancha de mergulho, pode-se investigar o comportamento para um peso, W, fixo e um comprimento da prancha, L, variável; ou então pode-se analisar o efeito de diferentes materiais de construção no comportamento da prancha, fazendo variar o E. O uso de um modelo matemático ajuda a adquirir uma percepção da forma como funciona uma prancha de mergulho.

A modelação ajuda a exteriorizar a dinâmica que é inerente a muitas situações problemáticas. Considere o seguinte problema: Um emprenteiro de tratamento de relvados deseja estabelecer o seu negócio numa nova urbanização de 400 casas. Os seus serviços de manutenção de relva custam 275 dólares por ano a cada cliente. Ele sabe, por experiência própria que, nestas condições, consegue obter cerca de 100 clientes, mas procura angariar mais. Para atrair mais clientela, ele propõe que por cada novo cliente que arranjar, além dos 100, fará um desconto de 1.50 dólares a cada um dos clientes da urbanização. Neste sistema, qual será o número de clientes que dará o maior lucro ao emprenteiro?

Suponha que este problema era dado a alunos do primeiro ano de álgebra. Eles não aprenderam a maximizar funções. Como poderiam ser ajudados a resolver este problema? O problema consiste em *ver* como se comportam os lucros relativamente ao número de clientes que ultrapasse os 100. Portanto, o comportamento dos lucros tem de ser modelado. Usando uma calculadora, podem calcular-se alguns valores que se organizam numa tabela, e torna-se possível descobrir um padrão de comportamento. Veja-se a tabela 2.

Tabela 2

Efeito das bonificações nos lucros		
Número de clientes (C)	Custo por cada cliente	Lucro total (R)
100	275	27500
101	275 - (1.50)	27623.50
102	275 - (1.50 x 2)	27744
...	...	...
110	275 - (1.50 x 10)	28600
...	...	...
150	275 - (1.50 x 50)	30000
200	275 - (1.50 x 100)	25000

Os dados da tabela 2 indicam que para novos clientes, além dos 100, os lucros aumentam e depois começam a diminuir. Uma pesquisa mais cuidadosa do padrão de comportamento é justificada para valores próximos de C = 150. Veja-se a tabela 3. Os lucros máximos são encontrados para 142 clientes, permitindo fazer um desconto de 63 dólares a cada cliente individual da urbanização. A tabela de valores serve de modelo ao mostrar que os lucros aumentam para $100 < C \leq 142$ e diminuem para $142 < C \leq 400$. Um modelo mais sucinto seria o gráfico da relação funcional R = f(C) ou a dedução da expressão da função lucro, definida por ramos:

$R = 275C$ para $1 \leq C \leq 100$

e

$R = C(425 - 1.50C)$ para $100 \leq C \leq 400$.

Consequentemente, o emprenteiro, ao fazer a sua oferta especial deveria incluir a frase "apenas por um tempo limitado", por forma a poder retirar a bonificação quando tivesse adquirido 142 clientes.

Tabela 3

Pesquisa refinada do efeito dos clientes sobre os lucros		
Número de clientes (C)	Custo por cada cliente	Lucro total (R)
160	275 - (1.50 x 60)	29600
155	275 - (1.50 x 55)	29837.50
151	275 - (1.50 x 51)	29973.50
140	275 - (1.50 x 40)	30100
145	275 - (1.50 x 45)	30087

Após uma experiência de modelação como esta, os alunos podem apreciar melhor certos conceitos como as limitações de um dado processo e a sua maximização. No contexto da situação de modelação, a tabela de valores e o gráfico são mais do que uma colecção de números ou uma figura. Estes têm um significado especial como forma de representação do comportamento matemático associado a um problema. A modelação permite uma maior percepção do poder da Matemática.

Em situações de modelação, a Matemática decorre do problema e os alunos reconhecem este facto. As situações de modelação matemática podem servir também como veículos para a introdução de novos conceitos: investigações sobre o crescimento de populações e a diminuição de recursos naturais conduzem ao uso de funções exponenciais; a análise de interacções e os modelos de cadeias alimentares empregam algoritmos matriciais; e os programas de computador permitem gerar modelos para simular diversos fenómenos, como por exemplo o movimento de um projéctil.

Como incorporar a modelação matemática?

A resposta a esta questão depende, naturalmente, dos conhecimentos, interesses e personalidades dos professores envolvidos e das capacidades da turma com que se trabalha. Embora não se possa dar uma resposta pronta a esta questão, é possível oferecer algumas observações e reflexões. Uma abordagem a problemas de modelação deveria ser integrada, gradualmente e de forma moderada, em todos os currículos de Matemática existentes. Palavras como *modelo* e *modelação* podem ser empregues em situações apropriadas. Os passos do processo de modelação podem ser seguidos e explicitados. Quando são estabelecidos modelos, estes devem ser identificados — por exemplo, "Temos aqui um modelo para a comissão de vendedores" — explorados e manipulados. A separação e o isolamento da modelação matemática e resolução de problemas em relação ao resto do currículo de Matemática tende a levantar nos alunos a suspeita de que eles estão a ser colocados perante algo de estranho ou difícil. Daí que não haja qualquer necessidade de criar cursos específicos ou de definir partes de um curso exclusivamente destinados à modelação matemática.

Referências

Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS). *Overview and Analysis of School Mathematics Grades K-12*. Washington, D. C.: CBMS, 1975.

MMSC Project. *Mathematical Modelling in the School Curriculum: A Resource Guide of Classroom Exercises*. Middletown, Penn.: Pennsylvania State University at Harrisburg, 1988.

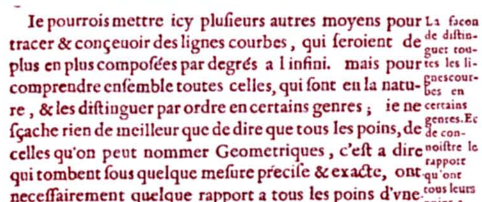
National Council of Teachers of Mathematics, Commission on Standards for School Mathematics. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va: The Council, 1989.

Sloyer, Cliff. *Fantastiks of Mathematiks: Applications of Secondary Mathematics*. Providence, R.I.: Janson Publications, 1986.

Próximo número temático

História e Ensino da Matemática

O número temático de 1993, correspondente ao terceiro trimestre, será dedicado à problemática da presença da História da Matemática nos ensinos básico e secundário e sua correcta inserção no currículo. O número está a ser preparado desde já, e evidentemente, a equipa responsável convida os leitores de Educação e Matemática a enviarem a sua colaboração, sob a forma de artigos, pequenas notas ou observações, relatos de experiências, interrogações, etc.


Ie pourrois mettre icy plusieurs autres moyens pour tracer & conçeuoir des lignes courbes, qui feroient de plus en plus composées par degrés a l infini. mais pour comprendre ensemble toutes celles, qui sont en la nature, & les distinguer par ordre en certains genres; ie ne sçache rien de meilleur que de dire que tous les poins, de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'est a dire qui tombent sous quelque mesure precise & exacte, ont necessairement quelque rapport a tous les poins d'vne ligne droite, qui peut estre exprimé par quelque equation, en tous par vne mesme, Et que lorsque cete equa-

La facon de distinguer toutes les lignes courbes en certains genres. Et de connoistre le rapport qu'ont tous leurs poins a ceux des lignes droites.

Poderia dar aqui várias outras maneiras de traçar e conceber uma série de curvas, cada uma mais complexa do que a anterior, mas penso que a melhor maneira de agrupar todas essas curvas e de classificá-las pela sua ordem é através do reconhecimento de que todos os pontos de tais curvas, que poderemos chamar "geométricas", isto é, as que se podem medir de forma precisa e exacta, devem admitir uma relação com todos os pontos de uma linha recta, e essa relação deve ser expressa por meio de uma simples equação.

Descartes: inícios da Geometria Analítica(1637)