Matemática realista na Holanda

Henk van der Kooij

"Um professor que não sabe todas as respostas pode ser mais útil do que um professor que as sabe. Mais precisamente, saber a/uma resposta pode tornar mais difícil ao professor apreciar o pensamento dos alunos e, com maiores probabilidades, ele acabará por conduzi-los à sua solução."

John Mason,
Viana do Castelo,
Abril de 1991

Renovação dos currículos na Holanda

No decurso da última década, a educação matemática nas escolas secundárias da Holanda (idades dos 12 aos 18) tem vindo a sofrer mudanças bastante revolucionárias. Em 1985, a *Matemática A* foi introduzida a nível nacional nos últimos anos da via pré-universitária (VWO, idades de 16 a 18). Este novo programa destina-se aos alunos que se preparam para ingressar na universidade em cursos de psicológia, ciências sociais e económicas. A experimentação que conduziu ao novo currículo (o HEWET--Project) foi levada a efeito pelo Instituto Freudenthal (antes IOWO e OW&OC). Em 1990, novos currículos foram introduzidos nos últimos anos da via técnico--profissional[1] (HAVO): não apenas a *Matemática A* para os estudos sociais e para a "vida quotidiana", mas também um novo currículo (*Matemática B*) para os futuros alunos de ciências exactas e de outras áreas vocacionais. Mais uma vez, as experiências com os novos programas (o HAWEX-Project) foram conduzidas pelo Instituto Freudenthal (IF). Para completar as transformações: a introdução de um novo currículo (preparado pelo IF em cooperação com o Instituto de Desenvolvimento Curricular-SLO) destinado a alunos dos 12 aos 16 anos está prevista para Agosto de 1993. (Esta estranha transformação curricular de cima para baixo é devida a algumas decisões políticas absurdas).

Perspectivas de mudança na educação matemática

É claro que a educação matemática na Holanda, a todos os níveis, está a ser actualmente influenciada pelas ideias de Freudenthal e do seu Instituto, uma vez que estes estiveram profundamente envolvidos no desenvolvimento dos novos programas. Esta visão da educação matemática, geralmente referida como *educação matemática realista*, enquadra-se muito bem nas ideias de mudança que surgem actualmente em muitos países, tanto na Matemática como na Educação Matemática. De certa forma, todas as questões têm como foco aquilo que a equipa do projecto português MAT_{789} formulou do seguinte modo:

> "... a escola deve, acima de tudo, contribuir para desenvolver a compreensão do papel que a Matemática desempenha na vida dos alunos e na sociedade (ao longo da história e no presente) e para gerar atitudes positivas em relação à Matemática. Para isso, deve valorizar os *processos* em vez do conhecimento factual e as *ideias* em vez das técnicas, e deve proporcionar uma larga variedade de actividades de resolução de problemas, envolvendo relações da Matemática com diversas áreas da realidade e internas à própria Matemática."

A Matemática como uma ciência isolada, sem qualquer referência ao mundo real, não tem valor para a maioria dos nossos alunos. Eles não precisam de um ensino da Matemática que seja essencialmente focado no treino de algumas técnicas de cálculo que se tornem inúteis para as suas profissões futuras e para a sua vida diária.

Por outro lado, o uso extensivo de computadores na sociedade modificou a forma como as pessoas têm de trabalhar em muitas profissões:

> "Cada vez mais, a sociedade é influenciada pelos processos controlados por computador. A maioria das profissões requer, actualmente, capacidades de análise em vez de capacidades mecâni-

cas, portanto, a maior parte dos estudantes precisa de mais Matemática na escola como preparação para a sua profissão. Também na vida quotidiana as pessoas se vêem confrontadas com todas as espécies de gráficos e dados estatísticos, por exemplo, nos jornais diários e nas discussões políticas." (Mathematical Sciences Education Board, USA, 1990).

Na Holanda, os objectivos recentemente formulados da educação matemática (para a maioria dos alunos) são:

1. Tornar-se um cidadão esclarecido (alfabetização matemática): o objectivo social.

2. Preparar-se para o mundo do trabalho e para estudos posteriores: o objectivo económico.

3. Compreender a Matemática enquanto ciência: o objectivo científico.

Há também uma mudança nos conteúdos da educação matemática.

Nos antigos currículos, a maior parte do tempo era gasto em álgebra e cálculo. Uma fracção muito menor era atribuída à geometria plana e, nos níveis mais avançados, à geometria vectorial no espaço (aqui também de uma forma meramente algébrica).

Nos novos programas, aparecem quatro temas principais:

- matemática discreta (combinatória, grafos e matrizes),
- probabilidades e estatística,
- álgebra e cálculo aplicados,
- geometria no espaço.

Nos níveis mais elevados dos HAVO e VWO, os alunos podem escolher Matemática A e/ou Matemática B. Na Matemática A não existe geometria no espaço; a Matemática B é construída de um modo mais teórico com base no cálculo (aplicado) e na geometria no espaço.

Educação matemática: abordagem realista versus abordagem mecanicista

Até 1985, a educação matemática na Holanda em todos os níveis do ensino secundário era apenas centrada no treino de técnicas e na manipulação de algoritmos algébricos. Nesta visão, aqui designada por *mecanicista*, a Matemática é entendida como um sistema de regras. As regras são dadas aos alunos, que as verificam e as aplicam em problemas ("exercícios") semelhantes aos exemplos dados previamente. Na abordagem mecanicista, não há necessidade de dispender tempo em problemas do mundo real e em aplicações à realidade. A única forma de responder a perguntas como: "porque é que temos de aprender todas estas técnicas?", é dizendo: "porque precisarás delas para resolver os exercícios do próximo ano".

Após alguns anos de experiências com os novos programas, reconheço que a coisa mais importante que a maior parte dos alunos aprendeu comigo nessa altura talvez tenha sido: obedecer cegamente a ordens dadas por um superior, sem saber porquê e para quê. Para muitos alunos, a Matemática significava: procurar uma forma eficiente de imitar as estranhas manipulações do professor.

Uma das componentes essenciais da *educação matemática realista* é a oportunidade que é oferecida aos alunos de re-inventarem ou re-construirem ideias e conceitos matemáticos, ao serem colocados perante muitos e variados problemas do "mundo real" e situações que apresentam traços do mundo real ou traços de modelação.

Os alunos têm a possibilidade de escolher as suas próprias estratégias de resolução dos problemas. Um aspecto muito importante deste tipo de aprendizagem está no facto de os alunos serem confrontados com diferentes processos de resolução para o mesmo problema, usados pelos colegas (ou mesmo pelo professor). Deste modo, eles aprendem a ouvir outras pessoas de uma forma crítica, a valorizar o seu próprio trabalho e o trabalho dos outros e a apresentar as suas estratégias.

A certa altura, a abstracção, a formalização e a generalização têm lugar, *mas não necessariamente para todos os alunos* e não obrigatoriamente para todos os alunos ao mesmo tempo.

Um exemplo que ilustra a ideia de reinvenção (retirado de uma brochura do projecto HEWET acerca do crescimento exponencial) é a introdução dos logaritmos (para alunos de 15 anos).

Exemplo 1

Este gráfico representa o crescimento de plantas aquáticas, que ocupam inicialmente $1m^2$ (fig. 1).

1) A partir do gráfico, faz uma estimativa do número de dias a partir dos quais existem $20m^2$ de plantas.

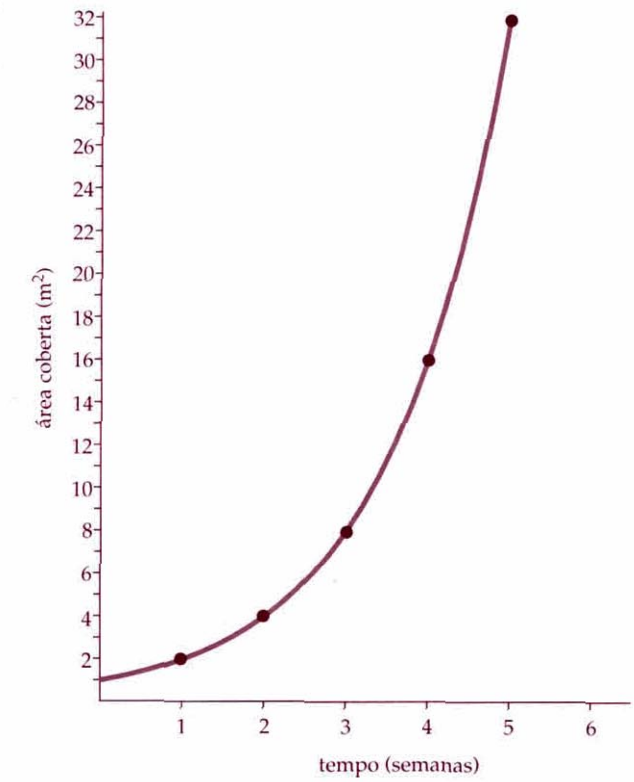

Fig. 1

2) Ao fim de quantos dias existiriam $40m^2$ de plantas? E $80m^2$? E $10m^2$? Verifica a última resposta através do gráfico.

A resposta à questão 1 é "cerca de 4.3 semanas".

Ao responder à pergunta 2 é importante notar que em cada semana que passa a área total duplica, logo as respostas serão respectivamente, 5.3, 6.3 e 3.3 semanas.

Uma observação notável: muitos

professores encontram obstáculos, ao tentarem responder a esta questão, devido ao seu conhecimento de logaritmos "isolado do contexto", que têm tendência a usar aqui. Para a maior parte dos alunos esta "duplicação em cada semana" é óbvia.

Apresenta-se agora a seguinte "definição enquadrada pelo contexto":

$\log_2 10$ é definido como o momento em que estão formados $10m^2$ de plantas, sendo 2 o factor de crescimento (começando em $1m^2$).

Neste momento, exercícios desligados do contexto são resolvidos por muitos alunos, a partir da noção de tempo que foi introduzida pelo contexto:

3) Justifica: $\log_2 16 = 4$; $\log_3 27 = 3$; $\log_5 25 = 2$.

Alguns alunos fazem logo a abstracção para a igualdade $2^4 = 16$.

A próxima questão antecipa a propriedade fundamental das funções logarítmicas:

4) Explica as seguintes igualdades:
$\log_2 3 + 1 = \log_2 6$
$\log_2 7 + 1 = \log_2 14$
$\log_2 6 + \log_2 2 = \log_2 12$

A explicação decorre directamente do facto de o número 1 ser interpretado como uma semana no contexto real. Uma forma diferente de exprimir a mesma igualdade seria: $\log_2 3 + \log_2 2 = \log_2 6$. A partir deste momento, os alunos começam a confiar na sua intuição e percebem que: $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab)$.

Durante este processo, que termina com a demonstração formal da propriedade fundamental dos logaritmos, é possível observar-se uma diversidade de comportamentos dos alunos. Alguns deles abandonam o contexto do "tempo" rapidamente, ao passo que outros precisam da tradução para o contexto do tempo a cada momento em que têm de resolver problemas envolvendo logaritmos.

No caso da re-invenção, os alunos são, na maior parte do tempo, guiados numa direcção bem definida que conduz a um conceito matemático.

A ideia de *(re)construção* oferece outras possibilidades interessantes para a educação matemática. Perante um problema do mundo real, os alunos são desafiados a resolvê-lo sem que lhes seja dito exactamente como fazê-lo. O próximo exemplo simples ilustra esta ideia:

Exemplo 2

Mieke recebe uma quantia de 5 florins por semana e amealhou 25 florins. Annemarie apenas recebe 3 florins por semana, mas já conseguiu economizar 35 florins. Ao fim de quantas semanas terão elas a mesma quantidade de dinheiro?

É verdade que este tipo de problemas do "mundo real" pode encontrar-se em qualquer livro de Matemática, por todo o mundo. A maior parte dos professores e autores de livros escolares acham que constituem boas aplicações da teoria sobre resolução de equações lineares. Assim, nos livros de texto mecanicistas aparece um capítulo em que é apresentado o algoritmo para a resolução de equações lineares e este é treinado pela resolução de um grande número de exercícios com uma complexidade crescente. A última secção contém "aplicações" análogas ao problema das semanadas. A maior parte dos alunos não reconhece equações lineares numa situação como aquela e a minha experiência mostrou-me que eles só pretendem resolver o problema através de uma equação linear quando lhes é ensinado a traduzir o problema por meio de uma equação. Na abordagem mecanicista nunca é pedido aos alunos que desenvolvam actividades de tradução matemática ou modelação. Consequentemente, na abordagem mecanicista estes problemas do "mundo real" não são mais do que exercícios "disfarçados".

Quando este problema é dado a alunos de 12 anos, por exemplo, sem referência a qualquer teoria, obtêm-se importantes informações sobre o modo como as crianças atacam tais problemas. Com frequência, as estratégias usadas pelas crianças diferem muito daquilo que nós (matemáticos bem treinados) achamos que elas deviam fazer.

Duas estratégias de resolução para o problema das semanadas são:

1. Construir uma tabela para comparar o dinheiro que as duas raparigas têm:

depois de... semanas	Mieke	Annemarie
inicialmente	25	35
1	30	38
2	35	41
3	40	44
4	45	47
5	50	50

2. No início, Mieke está com 10 florins a menos. Em cada semana ela tem uma recuperação de 2 florins. Portanto, ao fim de 5 semanas não haverá diferença e as duas terão o mesmo.

A primeira estratégia é a mais natural: trata-se apenas de comparar as duas quantidades de dinheiro, semana após semana. É evidente que estas tabelas suscitam discussões acerca de regularidades e sobre formas de abreviação quando as tabelas se tornam demasiado longas.

A segunda estratégia é de uma ordem superior, mas mesmo assim muito elementar. Comparemos agora esta estratégia com a forma "profissional" de resolução. A maioria dos matemáticos usa a via algébrica: seja x o número de semanas desde o início, então:

$5x + 25 = 3x + 35$, logo $2x = 10$ e portanto $x = 5$.

Existe uma grande diferença entre esta estratégia e a estratégia 2: ao ser feita a tradução do contexto real para uma forma algébrica, o problema torna-se *estático*. Na estratégia 2 os alunos trabalham no interior do contexto do problema e este torna-se *dinâmico*.

A maioria dos problemas que nós resolvemos por meio de equações lineares podem ser atacados de uma forma dinâmica e enquadrada pelo contexto. O mesmo é válido em muitas outras áreas em que nós (matemáticos) caímos no uso formal, estático e (pelo menos para algumas crianças) místico da álgebra.

Nos novos programas para os níveis mais baixos foi dado um grande espaço à resolução de problemas sobre situações do mundo real, de modo informal e enquadrado pelo contexto. Desta maneira, os alunos ganham confiança na sua capacidade de resolver problemas complexos. Com o decorrer do tempo, eles podem interessar-se pela resolução destes problemas através de ferramentas algébricas.

No programa antigo, as manipulações algébricas eram feitas logo pelos alunos de 12 anos. No novo programa é dada grande atenção, nos dois primeiros anos, à leitura, à interpretação (no interior de um dado contexto) e à construção de fórmulas. Deste modo, os alunos vão sendo familiarizados com conceitos difíceis como os de variável e parâmetro. A calculadora é frequentemente usada como uma ferramenta concreta para a preparação de noções algébricas.

Consequências das mudanças para a prática na sala de aula

Como foi dito atrás, as mudanças são verdadeiramente uma revolução para muitos dos professores. Os novos programas requerem novas visões acerca do papel dos professores e dos alunos, acerca da elaboração de livros de texto e do modo como os programas devem ser avaliados.

O papel do professor

Na abordagem mecanicista e estruturalista, o professor é a única autoridade na sala de aula. Quase sempre ele ensina a toda a turma o modo de resolver exercícios e de evitar erros, uma vez que ele viu, ano após ano, toda a espécie de erros possíveis. É ele que conhece *a* solução para cada problema.

Quando um professor deseja ensinar os novos programas tendo em conta as intenções que estiveram na base da sua concepção, ele tem de modificar a sua atitude; e isto diz respeito não só ao seu estilo de ensino como também às suas ideias acerca da qualidade da educação matemática. Para certos professores, os novos programas representam um declíneo na qualidade matemática, já que a ênfase dos antigos programas em técnicas e teorias mais ou menos difíceis é substituída por aquilo que eles consideram como actividades *menos* matemáticas de aplicação e modelação.

O estilo de ensino tem de ser alterado porque nos novos programas:

- a Matemática perde muito da sua estrutura,

- a Matemática não é sinónimo de certeza,

- são possíveis várias respostas e estratégias de resolução,

- os alunos podem descobrir melhores soluções do que o professor, quando têm possibilidade de as discutir.

Nos novos programas o papel do professor deixa de ser o da autoridade absoluta para ser o de uma pessoa que está a activar e a guiar os processos individuais de aprendizagem de todos os alunos. Importantes actividades do professor são: oferecer apoio, questionar, ouvir e raciocinar juntamente com os alunos, provocar, estimular e guiar discussões.

O papel do aluno

A principal diferença no papel dos alunos está em esperar que eles aprendam de uma forma activa em vez de passiva. Eles terão de pensar por si próprios e formular respostas em que expliquem, não só o que fizeram, mas mais importante ainda, *como* e *porquê* escolheram aquela solução. No princípio, muitos alunos não gostam disto e dizem que estão sempre pressionados a pensar e detestam que assim seja. "Você é o professor e, portanto, tem de me ensinar o que devo fazer. É para isso que lhe pagam." Ao fim de algum tempo, quando eles descobrem que esta abordagem é bem sucedida, acabam por apreciá-la bastante. Na verdade, isto também se aplica aos professores críticos: quando eles verificam que um maior número de alunos tem sucesso em fazer Matemática desta forma, eles mudam a sua opinião sobre os novos programas.

O livro de texto

Os novos currículos trazem consequências importantes para a elaboração de bons livros de texto. Isto porque os antigos livros de texto eram preenchidos com páginas inteiras de exercícios para praticar um conjunto de técnicas ou aspectos teóricos. As aplicações, se as havia, eram colocadas no final do capítulo.

Uma vez que as aplicações e os problemas extraídos do mundo real estão no centro da matemática realista, os livros terão de oferecer uma abundância de bons contextos reais. As aplicações integradas em contextos são usadas como ponto de partida para cada novo assunto, são parte do processo de construção de conceitos matemáticos dos alunos e são usadas como fontes de exercícios.

Sendo as actividades de modelação e resolução de problemas partes importantes dos novos currículos, um bom livro de texto deverá cumprir os seguintes critérios:

- a teoria e as aplicações têm de estar interligadas,

- os problemas apresentados têm de estimular os processos de pensamento em vez da aplicação de algoritmos,

- em diversos locais devem aparecer contextos ricos. Isto significa: contextos em que estão integradas diferentes ideias matemáticas,

- têm de incluir muitos problemas abertos: problemas para os quais os alunos precisam de escolher a ferramenta matemática mais adequada.

Os problemas interessantes não se encontram apenas em contextos do mundo real. O exemplo seguinte é tirado do programa de Matemática B, para os últimos anos da via técnico-profissional (os alunos são preparados para qualquer disciplina exacta de um ensino superior vocacional). O contexto é puramente matemático. De facto, pretendia-se um exercício sobre substituição de expressões algébricas.

Exemplo 3

Dadas as linhas rectas l: $y = 2x - 10$ e m: $y = 10 - 0.5x$, o ponto A está sobre a recta l e o ponto B está sobre a recta m, de tal modo que AB é horizontal e o comprimento de AB é 6. Calcula as coordenadas de A e B (fig. 2).

(Sugestão: Seja $x_B = x$; exprime y_B, x_A e y_A à custa de x).

A sugestão pretendia ajudar os alunos a resolver o problema mas, uma vez mais, verificámos que a forma como os alunos resolvem problemas difere das nossas ideias. Eles não souberam o que fazer com aquela pista. Os alunos que procuraram uma solução pelos seus próprios meios fizeram um óptimo trabalho. Repare-se nas seguintes soluções elegantes:

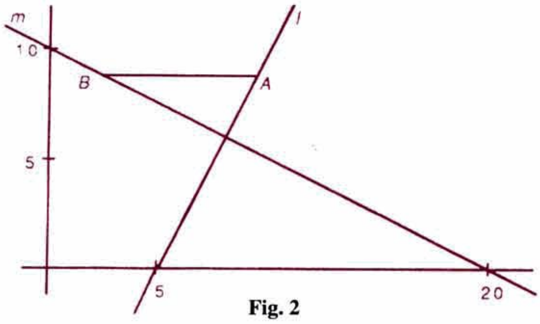

Fig. 2

1. Uma abordagem algébrica:

$x_A = 0.5y + 5$ e $x_B = 20 - 2y$, logo $x_A - x_B = 2.5y - 15$. Sendo $x_A - x_B = 6$, segue-se que $y = 8.4$ e $x_A = 9.2$ e $x_B = 3.2$.

2. Uma abordagem dinâmica:

A translação da recta l segundo o vector (-6,0) dá a recta l': $y = 2x + 2$. A intersecção da recta l' e da recta m é o ponto B: $2x + 2 = 10 - 0.5x$, logo conclui-se que $x_B = 3.2$, etc.

3. Usando o significado de declive (fig. 3):

Se o declive de l é 2, então se $\Delta x = 1$

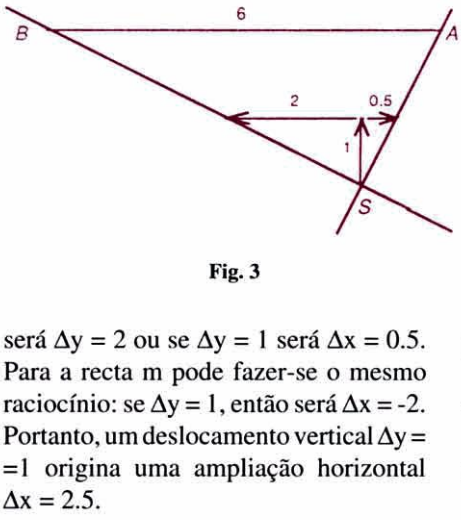

Fig. 3

será $\Delta y = 2$ ou se $\Delta y = 1$ será $\Delta x = 0.5$. Para a recta m pode fazer-se o mesmo raciocínio: se $\Delta y = 1$, então será $\Delta x = -2$. Portanto, um deslocamento vertical $\Delta y = =1$ origina uma ampliação horizontal $\Delta x = 2.5$.

Conclusão: $y_A = y_B = 8.4$; $x_B = 8\ 2*2.4 = 3.2$ e $x_A = 8 + 0.5*2.4 = 9.2$.

4. Uma abordagem geométrica (fig. 4).

Da figura resulta que:

h/6 = 15/6, donde h = 2.4.

O ponto de intersecção das rectas é S(8,6), logo y = 8.4.

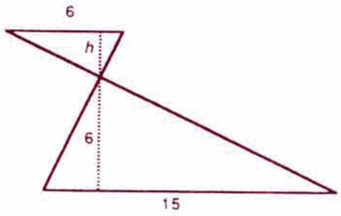

Fig. 4

Os valores de x_A e de x_B obtêm-se por substituição do valor de y nas equações das rectas dadas.

As quatro estratégias diferentes são todas baseadas em conhecimentos que os alunos possuíam de lições anteriores. Este exemplo mostra o que os alunos são capazes de fazer depois de terem aprendido a pensar por si próprios e a usar as suas próprias estratégias na resolução de problemas.

A avaliação

Nos antigos programas, a avaliação era quase sempre feita por meio de testes escritos de duração limitada, nos quais apenas se testavam capacidades relacionadas com o uso de técnicas e algoritmos. É óbvio que os novos programas exigem outras formas de avaliação. A avaliação não se deverá restringir às técnicas matemáticas. Deverá operacionalizar todos os objectivos da educação matemática, pelo que os alunos deverão ter oportunidade de demonstrar que são capazes de:

- escolher uma estratégia apropriada para resolver problemas e de usar algoritmos quando resolvem esses problemas,
- criticar um dado modelo ou argumentação,
- integrar diferentes modelos matemáticos,
- usar novos conceitos ou dados em situações novas, após uma breve descrição,
- explicar a escolha de um método, o processo usado na resolução e os resultados obtidos, através de palavras convenientemente organizadas ou mediante outras formas de representação adequadas.

Embora tenham sido desenvolvidos diversos instrumentos alternativos de avaliação ao longo das experiências dos projectos HEWET e HAWEX, ainda não foi dada a palavra final acerca da avaliação. Para muitos professores, parece ser bastante difícil elaborar bons testes.

Os três exemplos seguintes darão uma ideia sobre o que poderá ser perguntado num exame final na Holanda, embora os exames finais não sejam o instrumento mais indicado para a avaliação dos novos programas. Os exemplos são retirados, respectivamente, de um exame experimental, MAVO de 1991 (para alunos de 15 anos do 1º ciclo do ensino secundário), do exame HAVO de 1990 em Matemática B (para alunos de 17 anos da via técnico-profissional) e do exame VWO de 1989 em Matemática A (para alunos de 18 anos da via pré-universitária).

Exemplo 4

MAVO:

Este baloiço (fig. 5) não está desenhado à escala!

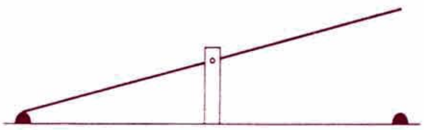

Fig. 5

O centro de rotação do baloiço está 52 cm acima do solo. Os batentes têm 16 cm de altura. A prancha tem um comprimento de 5.32 metros.

1) A que altura se situa o ponto mais alto do baloiço?

O baloiço não pode ser muito inclinado, pois as crianças poderão escorregar e cair. De acordo com os padrões de exigência, o ângulo de inclinação não pode ser superior a 10°.

2) É verdade que este baloiço satisfaz os padrões de exigência?

Supõe que a prancha do baloiço passa a ter um comprimento três vezes maior. As posições dos batentes são então ajustadas.

3) Qual será o ponto mais alto que o baloiço atinge acima do solo?

4) Qual será o ângulo de inclinação nesse caso?

Exemplo 5

HAVO:

Um pistão (fig. 6) é ligado a um disco rotativo por meio de uma haste (a vara do pistão). À medida que o disco roda, o pistão move-se horizontalmente para trás e para a frente. M é o centro do disco, S é o ponto de ligação da vara com o disco e P é o ponto de ligação da vara com o pistão. MS = 1 e PS = 4. Seja x radianos a amplitude do ângulo PMS. A distância PM depende do ângulo x; seja PM = a(x).

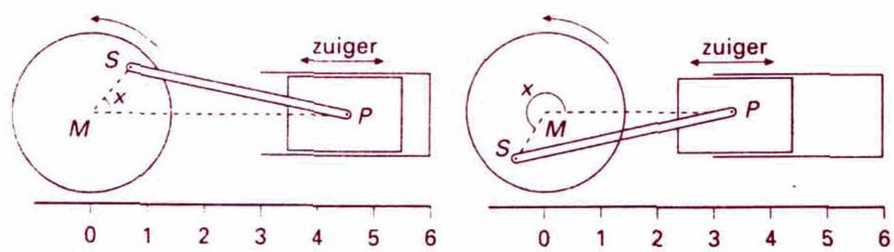

Fig. 6

A fórmula seguinte é válida para qualquer ângulo x:

$a(x) = \cos x + \sqrt{16 - \operatorname{sen}^2 x}$

1) Demonstra que esta fórmula se verifica para um ângulo $0 < x < \pi/2$.

Na figura seguinte (fig. 7) está representado o gráfico de **a** como função de **x** no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$. Neste gráfico observa-se que o mínimo de a(x) é 3 e o máximo é 5.

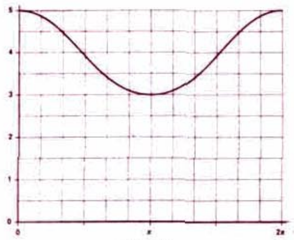

Fig. 7

2) Como é que isso pode ser explicado através da figura 6?

Há dois momentos ao longo de uma volta completa do disco em que o comprimento de PM fica igual ao comprimento da vara do pistão PS.

3) Quais serão os valores do ângulo PMS nesses casos?

A distância a(x) pode ser calculada aproximadamente pela fórmula:

$b(x) = 4 + \cos x$

4) Desenha o gráfico de b.

5) Investiga para que valores de x a diferença entre b(x) e a(x) é máxima e calcula essa diferença máxima.

Note-se que as questões 3 e 5 podem ser resolvidas de duas maneiras: por cálculos algébricos e por raciocínio geométrico.

Exemplo 6

VWO:

Numa tese acerca da criminalidade juvenil, um investigador partiu da hipótese que 30% dos estudantes do ensino secundário cometeram ocasionalmente furto em lojas. O presidente de um conselho directivo quer saber se a percentagem de 30% é também *verdadeira para os 1200 alunos da sua escola.* Supõe que efectivamente 30% dos alunos daquela escola já cometeu alguma vez furto numa loja. É escolhida ao acaso uma amostra de 15 alunos.

1) Calcula a probabilidade de haver pelo menos 5 alunos da amostra que já cometeram furto em lojas.

Parte do princípio que 6 dos 20 alunos de uma turma já cometeram furto daquele tipo.

2) Numa amostra aleatória de 10 alunos da turma, calcula a probabilidade de haver menos de 3 alunos que já cometeram furto.

Um professor decide fazer uma investigação exaustiva, interrogando todos os alunos da escola. Ele sabe que nesse inquérito nem todos dirão a verdade e, como tal, pensou em usar um método com o qual não é necessário responder sempre verdade. O método que ele resolveu usar é o seguinte:

- a cada aluno é feita a pergunta: "alguma vez roubaste numa loja?"
- antes do aluno responder à pergunta, ele tem de lançar um dado; o professor não fica a saber o resultado desse lançamento.
- o aluno terá de responder da seguinte forma à pergunta:

número sorteado	resposta a dar
1, 2, 3 ou 4	a verdade: "sim" ou "não"
5	obrigatoriamente "sim"
6	obrigatoriamente "não"

O aluno é o único a saber se a sua resposta é devida ao acaso ou se está de acordo com a verdade. Este método de questionário, conhecido como "*técnica de resposta aleatória*" torna possível tirar conclusões a partir do estudo de todas as respostas dadas.

Das 1200 respostas dadas, 416 foram "sim". O professor estimou que o número de alunos que alguma vez cometeram furto em lojas é de 324.

3) Explica como é que ele chegou a esta estimativa.

O número de 324 estudantes é obviamente menor do que os 360 estudantes que se esperaria encontrar, de acordo com a tese. É claro que os alunos desta escola não constituem uma amostra aleatória de todos os alunos do ensino secundário. Assim, a hipótese *do investigador não pode ser rejeitada com* base nesta amostra.

4) Verifica se deveria ou não ser rejeitada a hipótese do investigador, no caso de uma amostra aleatória de estudantes em que houvesse exactamente 324 alunos que já tivessem praticado furto em lojas. Usa um nível de significância de 5%.

A técnica de resposta aleatória é discutida numa aula de Matemática. Um aluno propõe um método bastante mais simples, com as seguintes instruções:

número sorteado	resposta a dar
1, 2 ou 3	a verdade
4, 5 ou 6	o contrário da verdade

O aluno diz ainda que, neste caso, também é garantida a privacidade de cada pessoa que responde.

5) Será útil esta variante da técnica de *resposta aleatória?*

Os alunos estão familiarizados com questões semelhantes às questões 1, 2 e 4. As questões 3 e 5 apresentam uma grande originalidade. Os alunos nunca viram algo do mesmo género anteriormente. Estas questões ultrapassam, de facto, o nível dos algoritmos e das técnicas. Os alunos (e os professores!) que nunca tiveram hipóteses de desenvolver as suas próprias estratégias de resolução de problemas, falharão na resposta a este tipo de questões. Faça uma tentativa!

Comentários finais

Há muito a dizer sobre as mudanças na Holanda, especialmente sobre as ideias da abordagem realista. Existem vários livros e artigos publicados em inglês pelo Instituto Freudenthal, que falam das ideias holandesas.

Embora as experiências com os novos currículos sejam positivas, permanecem muitas questões. Para mencionar algumas:

- Qual é exactamente o papel da álgebra? Como foi referido, muitos alunos não a usam do mesmo modo que nós, quando resolvem problemas do mundo real. Os matemáticos preferem a generalização dos métodos. Mas talvez a transferência seja mais importante do que a generalização.

- Como é que os novos programas podem ser avaliados de uma forma adequada? É necessária bastante investigação a propósito deste tema.

Terminarei com dois comentários de alunos que fizeram a Matemática A no nível pré-universitário. Ambos estão agora na universidade, um em Psicologia e o outro em Matemática. Os comentários mostram de que forma grande parte dos alunos é a favor da nova abordagem na educação matemática. E não será isso que realmente se pretende?

"Eu gostei da forma como fizemos Matemática na escola. Porque quando descobrimos as coisas por nós próprios, nunca mais as esquecemos ao longo de toda a vida."

"Primeiro, fica-se com uma ideia de como uma coisa funciona. Depois de algumas experiências e alguns exercícios acabamos por provar o que acontece. Eu acho que isto foi a coisa mais importante que eu aprendi na Matemática A. Desta maneira fico com uma perfeita preparação para os meus estudos na universidade. Neste sistema, também é muito positivo o facto de nunca nos podermos esconder atrás da autoridade do professor. Temos de aprender por nós próprios."

Títulos em inglês sobre a educação matemática realista:

Jan de Lange: M*athematics, Insight and Meaning*, 1987.

K. Gravemeijer, M. van den Heuvel, L. Streefland: *Contexts, Free Production, Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education*, 1990.

L. Streefland (ed.): *Realistic Mathematics Education in Primary Schools: on Occasion of the Opening of the Freudenthal Institute*, 1991.

[1] Na Holanda existe uma "via de ensino ou via pré-universitária" e, em paralelo, uma via para aqueles que pretendem terminar o secundário ou aceder a cursos técnicos. Esta via foi aqui designada por "técnico-profissional", para uma mais fácil identificação do seu significado, embora este termo não corresponda à tradução literal do inglês.

Henk van der Kooij
HMN/FEO, Utreque

Tradução de Susana Carreira
Revisão de Paulo Abrantes

ICTMA — uma conferência internacional sobre o ensino de modelos e aplicações da Matemática

O valor educativo das aplicações da Matemática nos currículos e nas aulas desta disciplina não será um tema novo. No entanto, nos últimos anos, tem vindo a merecer uma crescente atenção por parte da comunidade internacional ligada à educação matemática, seja ao nível da investigação, do ensino ou do desenvolvimento curricular.

Se, há uns anos atrás, as *aplicações* eram um tema de artigos em revistas ou sessões em Congressos sobre o ensino da Matemática, muitas vezes incluídos em secções mais gerais de resolução de problemas ou de interdisciplinaridade, hoje constituem uma área de trabalho a que muitas pessoas dedicam a sua actividade profissional e que é o tema central de diversas publicações e Congressos.

Um sintoma desta importância crescente é a realização de dois em dois anos, desde 1983, da ***International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications*** (ICTMA).

As duas primeiras edições tiveram lugar em Exeter, Inglaterra (1983 e 85) e eram voltadas essencialmente para os níveis de ensino pós-secundário. Em 1987, a conferência realizou-se em Kassel (Alemanha) e em 1989 em Roskilde (Dinamarca). Conotadas inicialmente com os países do Norte da Europa — nos quais o ensino das aplicações da Matemática e da modelação tem, de facto, tradições muito maiores do que noutros países — estas conferências têm vindo a alargar-se tanto do ponto de vista dos países de proveniência dos participantes como no que se refere aos níveis escolares abrangidos. O ICTMA-5, realizado em Noordwijkerhout (na Holanda) em 1991, confirmou esta tendência, com participantes de muitos países (entre os quais vários portugueses) e com a apresentação e discussão de trabalhos relativos a todos os níveis de ensino.

O principal objectivo do ICTMA é "constituir um *forum* para a apresentação e troca de informações, perspectivas e ideias entre pessoas envolvidas na investigação ou na prática do ensino das aplicações, modelos e modelação matemática". São considerados os níveis escolares que correspondem, em Portugal, às escolas preparatórias, secundárias e superiores.

O **ICTMA-6** terá lugar em **Delaware** (Estados Unidos da América) e decorrerá de **15 a 19 de Agosto de 1993**. De acordo com a prática habitual, o Comité Organizador é formado pelos responsáveis das conferências anteriores: David Burghes (UK), Ian Huntley (UK), Werner Blum (Alemanha), Mogens Niss (Dinamarca) e Jan de Lange (Holanda).

Informações sobre o ICTMA-6 podem ser pedidas a Cliff Sloyer, Department of Mathematics, University of Delaware, Newark, DE 19716, USA.