O problema do trimestre

Sobre as respostas ao problema anterior

No último número de *Educação e Matemática* foi proposto este problema:

"No dia do aniversário de Cinderela, apareceu-lhe a Fada-madrinha que lhe disse:

— Formula um desejo que eu satisfaço-o.

— Como a madrinha sabe, a Ada, que é a mais velha das minhas duas irmãs, tem mais oito anos do que eu. Ora eu detestaria vir a ser assim velha. Peço-lhe que me dê o dom da eterna juventude.

— Assim seja. Fica para sempre com a tua idade actual — disse a Fada Boa tocando-lhe com a varinha de condão.

Quando as duas irmãs souberam da prenda da Fada ficaram furiosas.

— És uma egoísta — gritou a Ada. — Esqueceste que, todos os anos na festa do reino, o pai nos dá, para dividirmos equitativamente entre nós, um saco com um número de moedas de ouro que é igual ao produto das nossas três idades.

— É verdade — confirmou a Brenda que era muito boa em cálculo mental. — Só nos próximos dois anos o teu egoísmo vai-nos custar um total de 1382 moedas de ouro.

Quantos anos tem a Cinderela?"

Este problema foi originalmente proposto por Hubert Phillips no livro *My best puzzles in Mathematics*, editado pelas Dover Publications (Nova York, 1961). Recebemos desta vez um número significativo de respostas com contributos interessantes e curiosos.

Sejam **A**, **B** e **C** as idades actuais de Ada, Brenda e Cinderela, respectivamente, em que A=C+8.

Se a Fada-madrinha não tivesse acedido aos desejos da Cinderela, as três irmãs receberiam, nos próximos dois anos,

$$(C+1)(B+1)(A+1)+(C+2)(B+2)(A+2)$$

moedas, mas vão receber apenas

$$C(B+1)(A+1)+C(B+2)(A+2).$$

A diferença entre estes dois valores é de 1382. A equação que se obtém, depois de simplificada e de eliminada por substituição uma das variáveis, é

$3AB + 5A + 5B = 1373$ (eliminando C)

ou

$3BC + 5C + 29B = 1333$ (eliminando A).

Resta agora procurar as soluções inteiras de uma destas equações, directamente ou resolvendo primeiro em ordem a uma das incógnitas.

Resolvendo em ordem a C vem

$$C = \frac{1333 - 29B}{3B + 5}$$

Como afirma Judite Barros, "podendo recorrer a computador, dada a rapidez de cálculo, não há vantagem de ordem prática em perder tempo com o estudo de restrições". Caso contrário, vale a pena verificar que, como

$A = C + 8 > B$, vem

$$\frac{1333 - 29B}{3B + 5} + 8 > B$$

Resolvendo a inequação, vê-se que B<20. Há só 19 tentativas a fazer, ou até menos porque, como diz Dora Almeida, quando B diminui, C aumenta, e para B=11 a Cinderela já teria mais de 29 anos "e estaria quase a perder a juventude" (nem toda a gente pensa assim, Dora!)

Testando todos os valores possíveis para B, obtêm-se 3 soluções. Quem seguir outras vias, incluindo a de usar computador, poderá encontrar uma quarta solução, conforme se vê no quadro.

	Brenda	Cind.	Ada
1ª	1	163	171
2ª	3	89	97
3ª	17	15	23
4ª	23	9	17

A 4ª solução é de eliminar porque a Ada não seria a mais velha, embora Helena Rocha e Judite Barros salientem que, mesmo sem essa informação, não é aceitável que Cinderela, com 9 anos, tivesse "preocupações com a velhice" e desejasse "conservar a eterna juventude".

Também se tem de rejeitar as duas primeiras soluções. Argumentos: "Estas idades da Ada são um tanto inverosímeis, sobretudo tendo em conta que o pai das manas ainda está vivo" (Pedro Esteves); "uma diferença de 94 anos na idade

Problema proposto

OS FINALISTAS DO FUTURO

Nas 1000as Olimpíadas Intergalácticas de Jogos Matemáticos, a FIJM (Federação Intergaláctica dos Jogos Matemáticos) reparou numa particularidade curiosa do número de finalistas.

Com efeito, esse número de quatro algarismos, todos diferentes de zero, era igual à soma dos seus algarismos elevados à sua própria potência. Por exemplo 2^2, 3^3, 7^7,...

Quantos finalistas participaram nas 1000as Olimpíadas?

de duas irmãs não é humanamente possível" (Helena Rocha); "seria pouco provável que Brenda, só com 3 anos, pudesse" ser tão boa em cálculo mental (Alberto Teixeira); ou "Cinderela, que é uma rapariga nova..." (Orlando Freitas).

A **solução única** será então: Cinderela 15 anos, Ada 23 e Brenda 17.

Houve quem resolvesse o problema impondo curiosas restrições. Para João Torres "a Cinderela deve ter pelo menos 15 anos para poder casar com o Príncipe e nenhuma das irmãs deve ter mais de 40. Segundo reza a história, eram ambas moçoilas casadoiras e tinham esperança de ser escolhidas pelo Príncipe". Também para Alberto Canelas "Cinderela é uma menina casadoira, portanto não deve ter menos de 13 nem mais de 25". Para Luis Madureira, o produto das idades terá de ser múltiplo de 3.

Helena Rocha propõe um interessante método de resolução gráfico em computador (embora não o tenha conseguido testar): traçar o gráfico da função C=f(B) e sobrepor-lhe um quadriculado de lado unitário. As possíveis soluções seriam os pontos em que o gráfico coincidisse com os vértices do quadrado (valores inteiros).

Finalmente, Alberto Teixeira faz as seguintes considerações:

"Sou de opinião que Cinderela fez o desejo não por egoísmo, antes por puro altruísmo. Repare-se que, caso não pedisse para continuar com 15 anos, nem sempre seria fácil dividir as moedas pelas três irmãs.

Por exemplo, passados dois anos, elas teriam 25, 19 e 17 anos e o produto, 8075, dividido por 3 dá um número com dízima infinita: 2691,(6).

Penso, por isso, que não devemos pensar mal da Cinderela que, além de altruísta, é quase tão boa como a sua irmã Brenda em Teoria dos Números."

Ainda A MORADA DA EDITE

O problema *A morada da Edite*, proposto no número 21, foi também apresentado na secção "Desafios" do jornal *Público*. Um dos leitores, **Jorge Oliveira**, enviou-nos uma carta que, pelas questões que levanta, nos pareceu de grande interesse pôr à discussão.

"A solução de um leitor em que a praça teria 39490 casas e a Edite moraria no nº 27924 não está correcta. Penso que o erro se deve a uma insuficiente capacidade da máquina de calcular. (...) Pode-se verificar o erro desta solução reparando que 27924^2 termina no algarismo 6 e o produto $(39490 \times 39491)/2$ terminará em 5, não respeitando a relação $k^2 = n(n+1)/2$.

A sugestão de Judite Barros é aquela que explorei. De facto, tudo se passa em torno de quadrados perfeitos ímpares mas, na minha modesta opinião (sou engenheiro e não matemático), é possível restringir drasticamente a pesquisa(...). Com efeito, as soluções encontram-se junto aos quadrados dos seguintes números: 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, 3363,..., os quais constituem uma sucessão que obedece à seguinte fórmula de recorrência: $u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$

A partir daqui podemos determinar, por exemplo, as primeiras 10 soluções (muito longe das primeiras 50 referidas que dariam números gigantescos). O limite de n/k é $\sqrt{2}$, como era de esperar.

nº ímpar da série	quadrado	nº de casas (n)	nº da Edite (k)	n/k
1	1	1	1	1
3	9	8	6	1,(3)
7	49	49	35	1,4
17	289	288	204	1,4117647
41	1681	1681	1189	1,4137931
99	9801	9800	6930	1,(41)
239	57121	57121	40391	1,4142012
577	332929	332928	235416	1,4142114
1393	1940449	1940449	1372105	1,4142132
3363	11309769	11309769	7997214	1,4142135

A série de números ímpares pode dividir-se em duas:

a) 1, 7, 41, 239, 1393,... a que correspondem valores de **n** que são quadrados perfeitos e **n+1** o dobro de um quadrado perfeito;

b) 3, 17, 99, 577, 3363,... a que correspondem valores de **n** que são o dobro de um quadrado perfeito e **n+1** quadrado perfeito.

Cada uma das subsucessões obedece à fórmula de recorrência: $u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2}$

(...) Esta separação permite aplicar mais facilmente o método de indução, demonstrando a validade das fórmulas de recorrência, o que garante que os quadrados daqueles números ímpares são ou **n** ou **n+1**, com $n(n+1)/2$ = quadrado perfeito.

Para chegar a estas conclusões utilizei uma simples máquina de calcular de 8 dígitos, determinando exaustivamente as primeiras 6 soluções, até observar a lei de formação da sucessão dos números ímpares que suportam as soluções.

Penso, no entanto, que fica por demonstrar que esta sucessão de números ímpares esgota o problema. Confesso que perdi algum tempo a pesquisar uma demonstração mais formal, tendo "descoberto" algumas relações bastante interessantes entre os números envolvidos... mas as férias acabaram!

(...) talvez algum matemático se sinta desafiado à tal demonstração."

Também **Alberto Canelas** nos enviou uma carta sobre *A morada da Edite* discordando de "algumas das conclusões apresentadas, relativamente à generalização para uma praça de um tamanho qualquer". Tendo resolvido o problema de duas maneiras, com dois programas de computador em GWBASIC, obteve, a partir de certa altura, soluções diferentes. Afirma então: "(...) gostaria de lembrar que o computador é um precioso auxiliar nestas situações, mas é igualmente preciso ter um certo cuidado com o modo como é utilizado.

Em certas condições, o computador é incapaz de distinguir um número inteiro de um número *aproximadamente inteiro*. Por exemplo, substituindo na fórmula o valor n=39490, apresentado por António Amaral na revista, e fazendo as contas numa máquina de calcular suficientemente precisa obtemos o valor k=27924,00034 que não é, evidentemente, solução do problema."

Chama ainda a atenção para o facto curioso e inesperado de a razão entre duas soluções sucessivas de **n** (ou de **k**) tender para uma constante **c**. E, "embora não o conseguisse demonstrar, presumo que o valor da constante é dado por

$c = 2\sqrt{2} + 3 = 5{,}828427124746...$"

Finalmente, apresenta a 13ª solução. A praça teria 2.239.277.041 casas e a Edite moraria no nº 1.583.407.981.

José Paulo Viana