Pode-se aprender na escola a usar a Matemática em problemas da vida real?

Paulo Abrantes

Em Maio deste ano, realizou-se um concurso de características originais, para alunos do 9º ano do concelho da Amadora, intitulado *Matemática & Realidade*. Para além de sugerir que uma "competição matemática" deste tipo pode ter muito interesse para os nossos alunos e as nossas escolas, a análise do que se passou suscita um conjunto de reflexões sobre a aprendizagem da Matemática.

No dia 16 de Maio, um sábado muito quente, a Escola Secundária da Amadora abriu propositadamente para que aí se realizasse o concurso ***Matemática & Realidade***. Cerca de 70 alunos do 9º ano de quatro escolas participaram na prova.

Esta "competição matemática" assumiu características pouco comuns, bem identificadas no regulamento:

• os concorrentes eram grupos, constituídos por 3 a 5 alunos;

• a prova consistia em produzir uma resposta para uma (única) situação problemática;

• a situação proposta referia-se a um problema da realidade concreta, "susceptível de ser interpretado e tratado com o apoio ou através de processos matemáticos" e assumia a forma de uma questão de "resposta aberta", para a qual "não há uma abordagem ou uma solução previamente consideradas como as únicas *correctas* ou as *melhores*";

• os alunos tinham praticamente todo o dia para trabalhar e podiam circular à vontade pelas salas disponíveis, os pátios ou a zona do bar;

• os concorrentes eram encorajados a utilizar livremente livros, calculadoras, etc. e os computadores e impressoras da escola foram colocados à disposição dos grupos interessados.

O concurso foi promovido pelo Projecto MAT789 que, nos últimos anos, desenvolveu um currículo inovador para o 3º ciclo do ensino básico. Na ocasião, a turma experimental do Projecto que funcionava na Escola Secundária da Amadora estava no 9º ano, prestes a terminar uma experiência curricular que incluira diversos projectos envolvendo a utilização da Matemática em situações da realidade concreta. O concurso fora inicialmente pensado como uma forma de avaliar a resposta que os alunos dessa turma dariam a um problema *realista* mas que fosse para eles desconhecido. No entanto, a Equipa do Projecto decidiu *abrir* a iniciativa a todos os alunos do 9º ano do concelho, tendo em vista um objectivo adicional: chamar a atenção para o interesse educativo de um tipo de problemas pouco considerados nos programas e aulas de Matemática.

A organização do concurso contou com o apoio do Conselho Directivo da escola, da Câmara Municipal e de professores das escolas que aderiram à iniciativa.

A situação proposta

A folha que os alunos receberam no início da prova está reproduzida (em tamanho reduzido) na Fig. 1. Era apresentada uma situação relativa ao trânsito num cruzamento da Amadora e cada grupo era convidado a produzir uma proposta para a colocação de um sistema de semáforos nesse cruzamento.

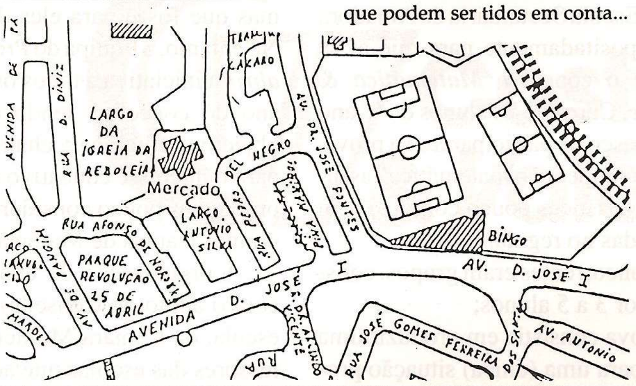
Ao longo do dia, os vários grupos foram concluindo os seus relatórios. Os trabalhos seriam depois apreciados, sob anonimato, por um júri formado por cinco pessoas (um membro da organização e um professor de cada escola participante) que decidiria dos prémios a atribuir.

A tarefa do júri não era fácil. Não se tratava de "classificar respostas" mas sim de "apreciar trabalhos" como referia o próprio regulamento. No entanto, os *critérios de apreciação* e, em geral, os resultados do concurso serão comentados mais adiante. Antes disso, convirá reflectir sobre algumas questões ligadas à aptidão para resolver problemas, em particular quando se trata de usar a Matemática em situações da *vida real*. Isso poderá ajudar a compreender o interesse em propor um certo tipo de actividades e

Considera o problema seguinte. Estuda-o e propõe as tuas soluções. Claro que não tens possibilidades, em pouco tempo e nas condições do concurso, de reunir todos os dados necessários. No entanto, deverás descrever os processos que usarias para os obter. Como as tuas propostas devem ser tão concretas quanto possível, poderás inventar, tu próprio, os dados de que precisas para explicar como funciona o teu modelo.

As avenidas D. José I e Dr. José Pontes admitem os dois sentidos de trânsito e têm duas faixas de rodagem. Junto ao seu cruzamento, a Av. D. José I é um pouco mais larga e nela estão assinaladas três faixas de rodagem, dado o trânsito ser muito intenso.

Para regular o trânsito neste cruzamento, poderiam ser colocados semáforos. Mas para adoptar uma tal solução há vários problemas a resolver e diversos aspectos que podem ser tidos em conta...



Locais onde podem (devem) ser colocados os semáforos.

A melhor maneira de organizar o sistema: num dado momento, alguns semáforos estão abertos e outros fechados; no período de tempo seguinte, alguns fecham, outros abrem e outros mantêm-se como estavam... e o processo continua até que o sistema volte à situação inicial.

O tempo de abertura não tem que ser o mesmo para todos os semáforos. E o sistema não tem que ser "fixo" ao longo do dia. Há portanto factores que se devem considerar e talvez um estudo prévio a fazer antes de se tomarem decisões.

Se nos fixarmos num certo período do dia — por exemplo, entre as 18 e as 20 horas — como é que poderia (deveria) funcionar o sistema?

Mas a decisão de implantar um sistema de semáforos tem custos. Além disso, há a opinião dos principais interessados. E haverá eventualmente outros aspectos relevantes...

Fig. 1 - A situação proposta no concurso *Matemática & Realidade* — Escola Secundária da Amadora, 16 de Maio de 1992

em criar um certo tipo de ambiente e de condições de trabalho.

Saber Matemática é diferente de saber usar a Matemática...

Pode saber-se muita Matemática e não se ser capaz de a usar quando se está perante um problema novo. Todos os professores conhecem alunos que têm muitas dificuldades em resolver problemas, às vezes bastante simples, mesmo conhecendo perfeitamente todos os procedimentos necessários para o fazer.

Diversos investigadores têm estudado os processos usados por aqueles que são bem sucedidos a resolver problemas. Um deles é Alan Schoenfeld que, num artigo publicado em 1987, analisa a maneira como um problema de geometria foi abordado por estudantes que dominavam todos os processos necessários para o resolver mas não conseguiram fazê-lo e por um matemático que não se recordava desses processos mas acabou por ser bem sucedido. Schoenfeld afirma que a diferença ficou a dever-se ao modo como "fizeram uso do que sabiam". Ao contrário dos estudantes, o matemático passou mais tempo a *pensar* do que a *fazer* e, por diversas vezes, usou com eficiência processos de *auto-verificação*.

Estas capacidades *metacognitivas* (assim chamadas por se referirem à gestão do próprio pensamento) não são os únicos factores que distinguem os "bons resolvedores de problemas". O mesmo autor salienta a importância das crenças acerca da Matemática: alunos que acreditam que todos os problemas se podem resolver em menos de 10 minutos desistem de trabalhar num problema ao fim de pouco tempo mesmo que fossem capazes de o resolver com mais esforço; aqueles que estão preocupados sobretudo com a forma da resposta gastam mais tempo com esse aspecto do que a tentar compreender o que estão a escrever; etc.

Mesmo quando o aluno tem os conhecimentos e aprendeu os processos cognitivos apropriados, não é garantido que ele esteja automaticamente *disposto* a utilizá-los. Lauren Resnick, uma investigadora da psicologia cognitiva, escreveu em 1987 que é preciso aprender a reconhecer e mesmo a procurar oportunidades para aplicar as capacidades que se tem, e que a escola deve ajudar a desenvolver não só as capacidades do pensamento mas também a disposição para usá-las. E admite que o tipo de motivação que se tem por uma tarefa esteja fortemente relacionado com a maneira como se trabalha na realização dessa tarefa.

Parece legítimo supor-se que estes factores estão associados à aptidão para resolver uma grande variedade de problemas, incluindo problemas de *aplicação* da Matemática. Mas será que a utilização da Matemática em situações da *vida real* não requer capacidades específicas que decorrem da natureza dessas situações e que não são geralmente mobilizadas em problemas *puramente matemáticos*?

Os *problemas* dos problemas de aplicação da Matemática...

Quando enfrentamos uma situação da realidade concreta (em que a Matemática nos pode ajudar!) alguns dos problemas que precisamos de resolver não se parecem muito com aqueles que se aprendem nas aulas.

Na vida real, muitas vezes, os problemas nem sequer estão ainda bem formulados e prontos a ser respondidos. Esta *indefinição* pode gerar dificuldades.

Alunos pouco habituados a enfrentar situações deste tipo tendem a mostrar-se pouco confiantes por "não se saber bem o que é para fazer". Por isso, faz sentido falar de uma capacidade para *formular problemas*.

Uma outra característica de muitos problemas da realidade é o facto de termos à partida, ao mesmo tempo, *dados a mais e a menos* (para usar os termos de Lesh num texto escrito em 1990). Ao contrário do que se passa na generalidade dos problemas propostos nas aulas, há dados que é preciso ignorar por serem irrelevantes para o processo pelo qual tencionamos atacar o problema. Mas, ao mesmo tempo, é quase sempre necessário recolher novos dados, seja através de consulta (de documentos ou pessoas) ou por meios experimentais.

O que fazemos normalmente não é considerar a realidade *tal e qual* mas sim uma versão simplificada. Depois, traduzimos os elementos desse *modelo real* em termos matemáticos, construindo um *modelo matemático* sobre o qual podemos usar os métodos que conhecemos desta disciplina. Finalmente, interpretamos os resultados em função da situação real e verificamos se é necessário fazer correcções ao modelo, por exemplo introduzindo factores que haviam sido ignorados. Este ciclo — que pode ter que ser percorrido várias vezes — é designado por *modelação* (Mogens Niss, num texto escrito em 1987, distingue modelação de *matematização* reservando este último termo para o processo de traduzir uma situação em termos matemáticos, ou seja, uma das etapas do ciclo atrás referido).

Ao fazermos e executarmos um plano para responder a uma situação da vida real, outra dificuldade pode vir da necessidade de considerar factores *extra-matemáticos* que são decisivos na situação concreta e que têm a ver com a área à qual a Matemática está a ser aplicada. Nas aulas, os alunos podem pensar que são auto-suficientes ou que precisam apenas da ajuda do professor ou de outra pessoa que *saiba* Matemática. Mas, na vida real, os problemas são muito mais interdisciplinares e a colaboração de pessoas de outras áreas pode ser essencial.

Outra dificuldade do *realismo* de um problema pode surgir se os alunos estão apenas habituados a resolver problemas artificiais nos quais as *respostas matemáticas* não são as *reais* e as diferenças não se discutem. Lesh, no texto atrás citado, diz que muitos alunos tendem a suspender os seus conhecimentos sobre o mundo real quando resolvem problemas de Matemática e apresenta um exemplo, retirado de um livro do 7º ano, que mostra como os alunos são por vezes *encorajados* a proceder dessa forma: "Pat corre 8 milhas numa hora; que distância conseguirá percorrer em 10 horas?".

Os problemas da realidade são geralmente de "resposta aberta". Isto quer dizer que não existe uma maneira única de os resolver nem uma solução única. E mesmo depois de se optar por um caminho, continua a ser preciso tomar decisões: qual é o grau de pormenor desejável, qual é a maneira apropriada de comunicar os resultados...? A qualidade das respostas pode estar mais ligada às explicações e justificações sobre os processos do que propriamente aos resultados produzidos. Henry Pollak escreveu em 1987 que estes problemas são muitas vezes da forma "aqui está uma situação, descreve-a (de um modo simplificado ou mais significativo)!" mais do que da forma "aqui está uma pergunta e alguns dados, responde-lhe!".

Um outro tipo de requisitos para se enfrentarem problemas realistas está ligado às atitudes e crenças dos estudantes. Muitos destes problemas exigem tempo e persistência, por vezes mais do que conhecimentos muito específicos. Este facto cria dificuldades àqueles que estão habituados apenas a resolver problemas do tipo "uma regra — um passo" ou que estão prontos a declarar que um problema é impossível se não é resolvido em pouco tempo.

Ao reflectirmos sobre estas *exigências* somos levados a questionar o grau de preparação dos nossos alunos para lhes responder... Resta saber se a Matemática escolar pode contribuir para desenvolver as capacidades e atitudes correspondentes e, em caso afirmativo, como. Pelo caminho, terão ficado já algumas pistas para uma resposta positiva. Uma vista de olhos pelo que se passou no concurso ***Matemática & Realidade*** talvez ajude a levantar outras.

As *lições* do concurso

Do ponto de vista do envolvimento dos alunos, o concurso foi um êxito indiscutível. Muitos alunos revelaram uma notável criatividade e gosto pelo trabalho autónomo (digno de registo é o facto de mais de metade dos grupos ter usado o computador, recorrendo a programas de desenho e de texto e à folha de cálculo). No entanto, a falta de experiência neste tipo de actividades foi também notória, sendo útil que se identifiquem alguns dos traços mais visíveis:

- vários grupos demoraram muito tempo a organizar-se e a começar verdadeiramente a trabalhar;
- alguns grupos gastaram pouco tempo a discutir colectivamente a solução que iriam propor e fizeram tudo muito depressa, entregando o seu relatório ao fim de duas ou três horas;

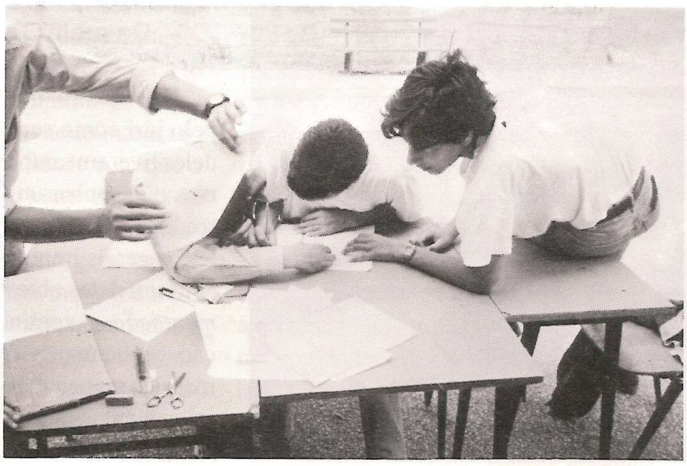


Fig. 2 - A motivação, a criatividade e a persistência são geralmente elementos essenciais quando se enfrentam problemas da realidade.

• um dos grupos escreveu que não se percebia "que Matemática é que se pretendia que fosse usada", acabando por apresentar um trabalho muito simplista e incompleto;

• alguns grupos deram mais atenção à forma do trabalho do que às soluções propostas — um deles, por exemplo, produziu um relatório em que o conteúdo não correspondia (infelizmente) à excepcional apresentação.

Dos 70 participantes (17 grupos), 20 eram os alunos da turma experimental do Projecto MAT789 (5 grupos). Enquanto os concorrentes das outras turmas eram em geral bons alunos em Matemática, da turma experimental participaram *todos*. No entanto, se é certo que eles eram, em termos médios, *piores alunos* que os restantes, tinham em contrapartida uma vantagem: possuíam alguma experiência de realização de projectos envolvendo relações da Matemática com a realidade.

Os grupos da turma experimental revelaram, todos, algumas *qualidades* — que também se verificaram noutros grupos (mas apenas em alguns!) — designadamente: (a) capacidade de organização e de cooperação entre os elementos do grupo; (b) persistência — ao contrário de metade dos outros, todos os grupos da turma experimental entregaram os seus trabalhos perto do fim do prazo; (c) forte motivação pelo trabalho mesmo da parte dos alunos mais fracos.

Estes dados são, só por si, dignos de atenção. Mas uma vista de olhos pelos critérios que o júri utilizou e pelas características dos trabalhos premiados fornecerá novas indicações.

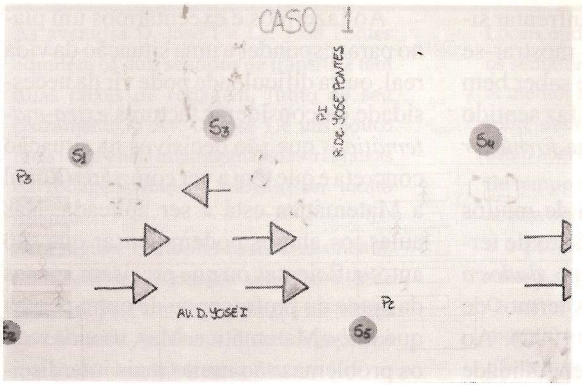


Fig. 4 - Propor representações adequadas é um dos problemas que é preciso geralmente resolver quando se está perante uma situação da realidade.

Os critérios de apreciação

De acordo com o regulamento, o júri deveria ter em conta: a pertinência e viabilidade da resposta em relação com a situação proposta; a relevância e correcção dos aspectos matemáticos envolvidos; a qualidade da argumentação; a clareza, organização e originalidade do trabalho.

Depois de cada membro do júri ter feito a sua avaliação individual de todos os trabalhos, efectuou-se uma reunião geral. Vale a pena referir que não foi difícil chegar a acordo sobre quais eram os trabalhos fracos, razoáveis ou bons. A maior dificuldade residiu no facto de ser preciso atribuir um primeiro e um segundo prémios.

Ao contrário do que sucede nos *testes objectivos*, a avaliação deste tipo de trabalhos é:

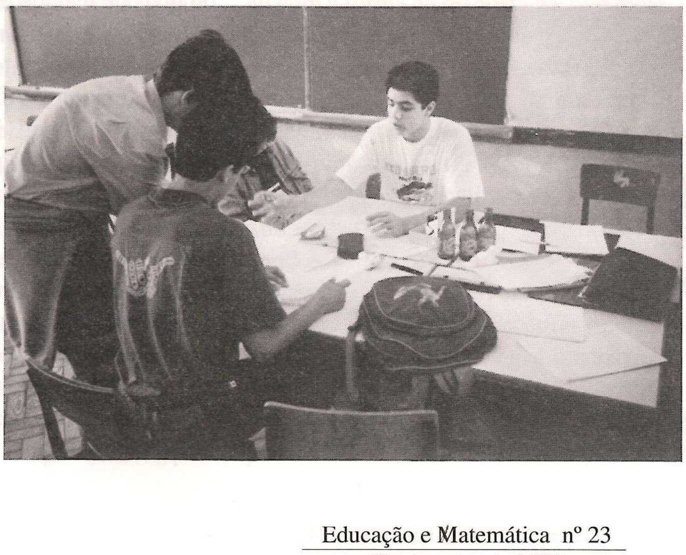
(i) mais *absoluta* do que relativa — cada trabalho tem que ser apreciado de acordo não só com os critérios gerais mas também com critérios específicos que atendam à maneira como o grupo abordou o problema (não se trata tanto de comparar uns com os outros mas de apreciar o *valor absoluto* de cada trabalho);

(ii) mais *qualitativa* do que quantitativa — faria sentido atribuir um nível a cada trabalho que nada teria de arbitrário mas seria justificado, caso a caso, com base nos critérios gerais e específicos referidos;

(iii) mais *global* do que resultante de pontuações atribuídas a diversas componentes — é essencial fazer-se uma apreciação global de cada trabalho, pesando os seus aspectos positivos e negativos.

Nestas situações, há (felizmente!) factos imprevisíveis. Surgiram trabalhos que, não sendo globalmente os melhores, tinham aspectos muito bons, o que levou o júri a atribuir prémios especiais, como se faz nos óscares de cinema... Um deles foi o da *originalidade* — atribuído a um trabalho muito sugestivo, apresentado na forma de maquete a três dimensões, feita em cartão. No entanto, a proposta não era adequada nalgumas fases do ciclo de funcionamento dos semáforos e a explicação era incompleta.

Fig. 3 - O ambiente de trabalho pode favorecer ou dificultar coisas tão importantes como a cooperação e a discussão entre os alunos.



Os melhores trabalhos

Dos quatro trabalhos considerados pelo júri como sendo os melhores, dois deles tiveram também prémios especiais mas não ganharam um dos dois primeiros lugares porque falhavam nalguns critérios gerais importantes:

• um deles obteve o prémio de *argumentação* — continha a melhor explicação esquemática do sistema proposto mas não respeitava as condições reais do cruzamento, fazendo *batota* com a largura de uma das ruas;

• outro ganhou o prémio de *planificação* — apresentava a mais completa sequência de etapas, partindo de um estudo sobre a quantidade de trânsito nas várias ruas e sentidos como base para as decisões sobre a duração das fases do ciclo de funcionamento dos semáforos, mas propunha uma solução um tanto simplista, não considerando factores como as passadeiras para peões.

Os dois restantes trabalhos ganharam o primeiro e segundo prémios previstos no regulamento. Ambos foram produzidos por alunos da turma experimental do Projecto MAT789. Em comum, estes dois grupos:

(a) dedicaram tempo a discutir e a planear antes de começar a responder;

(b) adoptaram uma perspectiva realista, respeitando as condições da situação e procurando mesmo fazer uso da sua experiência como peões;

(c) mostraram-se dispostos a correr riscos, considerando factores (como a articulação entre a passagem dos automóveis e a dos peões) que, embora sendo uma fonte potencial de erros, iriam enriquecer a proposta;

(d) fizeram uso de uma variedade de materiais, em particular do computador, e aproveitaram todo o tempo de que dispunham (o vencedor foi mesmo o último grupo a entregar);

(e) deram visível importância à comunicação da proposta, tanto ao texto como aos esquemas.

Claro que algumas destas qualidades foram também reveladas por outros grupos, de outras turmas, e alguns fizeram mesmo coisas brilhantes em certos aspectos. O que parece ser uma característica comum aos vencedores é o facto de terem exibido o conjunto de todas essas qualidades de um modo integrado e equilibrado. A naturalidade com que o fizeram (alunos que, do ponto de vista do *rendimento escolar*, são *médios* ou *fracos* quando comparados com grande parte dos outros participantes no concurso) sugere fortemente que as capacidades e atitudes reveladas são *comportamento aprendido* ou, por outras palavras, ganharam muito com a experiência adquirida em projectos que desenvolveram no âmbito do seu currículo de Matemática.

Fig. 5 - O lugar mais óbvio para zelar por componentes essenciais da formação matemática dos alunos parece ser a aula de Matemática...

Observações finais

Assim como é de esperar que alunos mais treinados a resolver equações obtenham melhores resultados numa prova de resolução de equações, também não surpreenderá afinal que alunos mais experientes a realizar projectos envolvendo o uso da Matemática em problemas da realidade se sintam mais à vontade numa situação deste tipo. A maneira de desenvolver as aptidões necessárias num e noutro caso é que não será a mesma — e daí o uso propositado dos termos "treinados" (para resolver equações) e "experientes" (na realização de projectos). Também a maneira de avaliar as aptidões correspondentes não será a mesma: para saber se um aluno é capaz de resolver uma equação, podemos trocar coeficientes e sinais a uma que ele já tenha resolvido; mas para avaliar as suas capacidades de enfrentar um problema novo, não vamos certamente trocar os semáforos (de um projecto realizado) por um polícia sinaleiro...

Pensando no conjunto de aptidões necessárias para usar a Matemática em problemas da vida real, somos levados a considerar que a escola pode (e deve) considerar uma boa parte delas e que isso implica incluir entre as experiências de aprendizagem dos alunos a realização de actividades adequadas. Embora não se negue o valor educativo que podem ter (em algumas ocasiões) problemas artificiais e estruturados, os alunos deviam ter oportunidade — pelo menos algumas vezes, como afirma Mogens Niss no editorial deste número da revista — de trabalhar sobre problemas *autênticos*, participando em *todo o processo* de modelação e envolvendo-se nesse trabalho de um modo *activo e independente*.

O trabalho de projecto implicando a utilização da Matemática para interpretar situações ou resolver problemas da realidade pode desempenhar um papel insubstituível, visto que as suas características favorecem o tipo de trabalho acima enunciado e valorizam factores decisivos como a cooperação, o trabalho autónomo dos alunos, a possibilidade de se fazerem consultas, a utilização de variados instrumentos e o tempo.

As maiores limitações da situação aqui relatada resultaram até do facto de se tratar de um concurso! Noutras circunstâncias, não só o problema poderia ter originado um projecto mais prolongado e mais realista (recolhendo-se dados sobre o trânsito, consultando-se pessoas, etc.) como as dificuldades de avaliação seriam bem menores visto que não se trataria de decidir posições e entregar prémios.

E sendo a capacidade de usar a Matemática em situações da vida real um aspecto tão relevante da própria Matemática, o lugar mais óbvio para zelar por tais componentes da formação dos nossos alunos parece ser a aula de Matemática...

Paulo Abrantes
Departamento de Educação
Faculdade de Ciências
Universidade de Lisboa