A modelação no processo de aprendizagem

João Pedro da Ponte

Um modelo é uma descrição simplificada duma situação, real ou imaginária. Particularmente importantes são os modelos matemáticos, que utilizam como base a linguagem e os conceitos desta ciência. Este texto apresenta alguns exemplos de actividades de modelação e discute o seu possível papel no processo de aprendizagem da Matemática.

A actividade de modelação

Os modelos matemáticos podem ter diversas formas, mas com frequência consistem basicamente numa equação, num sistema de equações ou num sistema de inequações. Se tivermos diversas variáveis actuando em simultâneo, o modelo pode ser representado por uma equação matricial. Se for preciso considerar taxas de variação de algumas variáveis, teremos um modelo com equações diferenciais.

Para traduzirmos uma situação da vida real por um modelo matemático, o primeiro passo é definir precisamente em que consiste o problema. Não adianta pretender resolver um problema que não se sabe muito bem qual é.

Uma vez definido o problema, precisamos de escolher uma estrutura matemática para o representar. Ao mesmo tempo, seleccionamos as variáveis que nos parecem fundamentais, e procuramos relacioná-las entre si.

Uma vez representado matematicamente o problema, procuramos utilizar as ferramentas matemáticas ao nosso dispor para o analisar, de modo a chegar a novas conclusões.

Estas conclusões, por sua vez, têm de ser interpretadas de acordo com a situação real de partida. Nestas condições, procedemos à avaliação do nosso modelo, decidindo se o consideramos ou não adequado. Em caso negativo, procuramos redefinir o problema, considerar novas variáveis, estabelecer novas relações entre variáveis, ou tentar novas vias de análise matemática. Poderemos ter de realizar vários ciclos deste processo até obtermos um resultado que julgamos satisfatório (v. figura 1)[1].

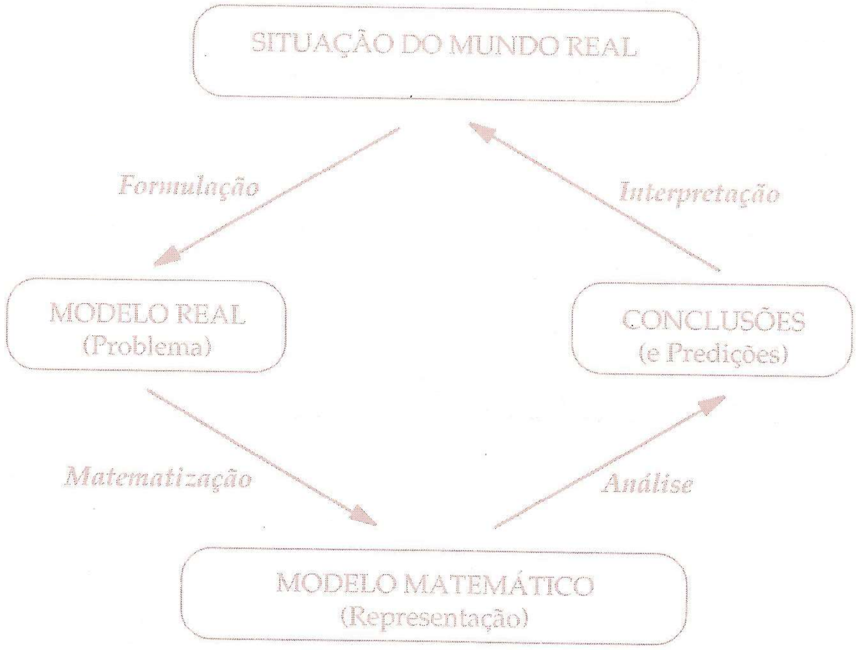

Figura 1

Vejamos agora alguns exemplos de problemas de modelação que podem ser usados como actividades de aprendizagem.

Exemplo 1- O percurso do carteiro[2]

O nosso problema consiste no seguinte. Um carteiro tem que entregar a correspondência nos dois lados da rua. Mas algumas artérias são largas, outras são estreitas. Em zonas de vivendas, circundadas por jardins, a distância entre pontos de entrega sucessivos é normalmente maior do que em zonas de prédios. Convém escolher o percurso que minimize a distância total a percorrer.

Imaginemos que as caixas do correio se encontram todas à mesma distância y umas das outras, e de lados opostos da rua, que tem largura x (v. figura 2). Imaginemos que o carteiro começa a sua distribuição no canto inferior esquerdo e que depois de acabada a distribuição passa à rua seguinte sem necessitar de voltar ao ponto de partida. Termina assim no canto superior esquerdo ou direito, conforme seja par ou ímpar o número de casas em cada um dos lados da rua.

Uma vez desenhado um diagrama da situação, sentimos que a solução há-de ser representada por uma das duas possibilidades indicadas.

No primeiro caso o carteiro vai atravessando sucessivamente a rua, cobrindo um par de caixas de cada vez. No segundo caso faz todo o percurso num dos lados, atravessa a rua, e depois faz o lado oposto. Como tem de continuar para a rua seguinte, volta a percorrer este último lado uma vez mais.

Adoptando uma estratégia clássica, procuramos representar o nosso problema algebricamente. Chamando D_1 ao primeiro percurso e D_2 ao segundo, teremos:

$$D_1 = 7x + 6y$$

$$D_2 = x + 18y$$

Para uma dada rua, de largura x, a primeira estratégia será preferível se

$$7x + 6y < x + 18y$$

Resolvendo a inequação concluímos que esta condição se verifica se $x < 2y$, isto é, se a largura da rua for menor do que o dobro da distância entre duas caixas consecutivas.

Esta solução tem por base um caso particular em que considerámos sete caixas de correio de cada lado da rua. O que se passaria se em vez de sete tivéssemos n caixas?

Neste caso, as nossas equações seriam:

$$D_1 = nx + (n-1)y$$

$$D_2 = x + 3(n-1)y$$

donde a inequação

$$nx + (n-1)y < x + 3(n-1)y$$

cuja solução é ainda dada por $x < 2y$. Portanto, a mesma solução é válida qualquer que seja o número de caixas de cada lado da rua!

Consideremos agora um problema algo diferente. Imaginemos que o carteiro, em vez de continuar para a rua seguinte, regressa antes ao ponto de partida. Para n ímpar teremos:

$$P_1 = (n+1)x + 2(n-1)y$$

$$D_2 = 2x + 2(n-1)y$$

Para n par, D_2 será dado pela mesma expressão mas D_1 virá dado por:

$$D_1 = nx + 2(n-1)y$$

Podemos desde já notar que em ambos os percursos, seja n par ou ímpar, aparece-nos sempre o mesmo termo em y. Isso quer dizer que a solução não vai concerteza depender da variável y mas apenas da variável x. Mas continuemos. Somos conduzidos às inequações

$$(n+1)x + 2(n-1)y < 2x + 2(n-1)y \quad \text{(para } n \text{ ímpar)}$$

$$nx + 2(n-1)y < 2x + 2(n-1)y \quad \text{(para } n \text{ par)}$$

Uma vez que os termos em y são todos iguais, estas inequações simplificam-se de imediato para (uma vez que x é necessariamente maior que zero)

$$n < 1 \quad \text{(para } n \text{ ímpar)}$$

$$n < 2 \quad \text{(para } n \text{ par)}$$

condições ambas impossíveis, o que mostra que o percurso D_2 é sempre preferível, quaisquer que sejam os valores de x e y. Ou seja, a solução que já sabíamos não depender de y, afinal não depende também de x. Mas não poderia este resultado ter sido imediatamente previsto, por simples raciocínio geométrico sobre a respectiva figura?

Proponho ao leitor que pense noutras estratégias para resolver estes problemas. Proponho igualmente que pense noutros problemas sobre percursos que possam ser postos a alunos de diferentes níveis etários, indicando quais os conhe-

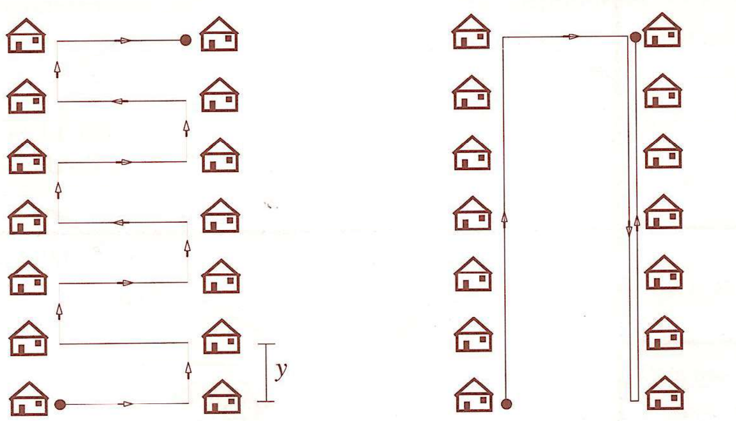

Figura 2

cimentos matemáticos relevantes para a sua resolução.

Poderá ser interessante referir aos alunos que os problemas sobre percursos constituem actualmente um ramo muito activo da Matemática. Por exemplo, um problema particularmente famoso é o problema do caixeiro viajante: Uma pessoa tem de se deslocar a n cidades, de que se conhecem as distâncias entre si; qual o percurso mais curto que pode ser escolhido? Para muitos destes problemas de percursos não se conhecem soluções exactas, desempenhando o computador um papel fundamental no seu estudo.

Exemplo 2 - O desporto em altitude[3]

Neste segundo exemplo vamos considerar os efeitos da altitude no rendimento dos atletas. Em que medida é a altitude vantajosa ou desvantajosa para conseguir melhores marcas?

A pressão atmosférica, que é de 1033 milibares ao nível do mar, diminui progressivamente à medida que se sobe. Em

Altitude (m)	Pressão (mb)
0	1033
1000	$1033\times.885$
2000	$1033\times.885^2$
3000	$1033\times.885^3$
4000	$1033\times.885^4$
5000	$1033\times.885^5$
6000	$1033\times.885^6$
7000	$1033\times.885^7$
8000	$1033\times.885^8$
9000	$1033\times.885^9$
10000	$1033\times.885^{10}$

cada 1000 m esta diminuição é de aproximadamente 11.5%. Podemos assim organizar a seguinte tabela:

Não será difícil concluir que uma expressão geral da pressão atmosférica P_1 em função da altitude h vem dada por

$$P_1 = 1033(.885)^{h/1000}$$

Temos agora que estudar esta função. Para isso será uma boa ideia tabelá-

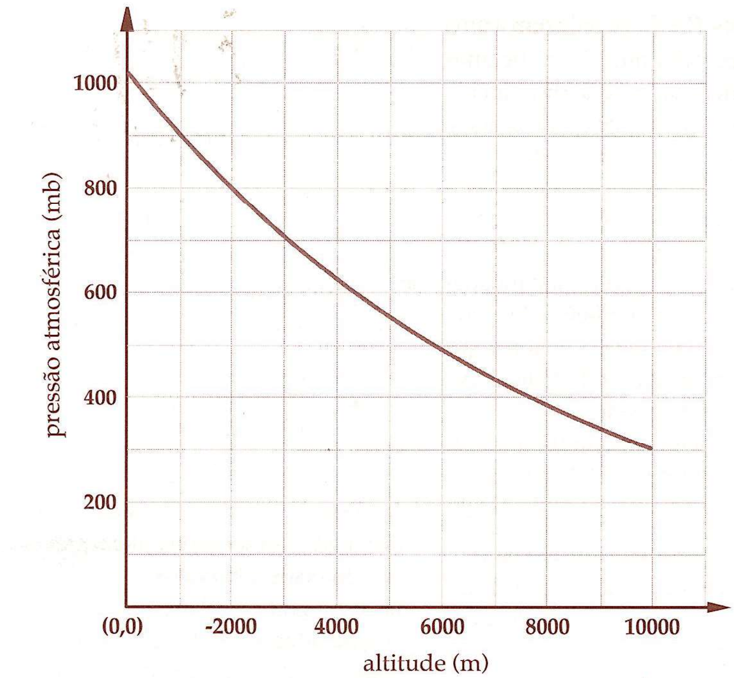

Figura 3

la em diversos intervalos e traçar o respectivo gráfico, tarefa em que o computador será de grande utilidade (figura 3).

Estaremos então em condições de considerar questões como as seguintes:

- qual a pressão atmosférica na cidade da Guarda (a cidade portuguesa a maior altitude)? (1 000 m)
- no alto da Serra da Estrela? (1 993 m)
- no alto da Ilha do Pico? (2 345 m)
- no Monte Branco? (4 807 m)
- no Monte Evereste? (8 848 m; parece-te possível realizar a escalada sem oxigénio suplementar?)
- partindo do nível do mar, qual a altitude a que é preciso subir para que a pressão atmosférica se reduza a metade?
- e para que se reduza de novo a metade (isto é, a um quarto do valor inicial)?
- e de novo a metade (a um oitavo do valor inicial)?

Verificamos assim que a pressão atmosférica diminui muito rapidamente. No entanto, a pressão atmosférica não actua directamente sobre o nosso organismo. Ela tem várias consequências, uma das quais diz respeito à pressão de oxigénio nos pulmões.

O oxigénio existe na atmosfera terrestre, a qualquer altitude, sempre na percentagem de 20.94%. Mas a composição do ar nos pulmões modifica-se porque, ao respirarmos, saturamos o ar de vapor de água. Este é responsável por uma parte constante da pressão de ar nos pulmões, no valor de aproximadamente 68 milibares. Deste modo, a pressão de oxigénio nos pulmões (que indicaremos por P_2) vem dada por

$$P_2 = (P_1 - 68)\times.2094$$

ou seja

$$P_2 = \left[1033(.885)^{h/1000} - 68\right]\times.2094$$

Façamos o estudo desta função, novamente tabelando-a e traçando o seu gráfico, de preferência usando o computador (v. figura 4, página seguinte). Podemos considerar questões semelhantes às anteriores. Qual a pressão de oxigénio nos pulmões a diversas altitudes? Qual a altitude a que é preciso subir para que ela se reduza a metade, a um quarto, a um oitavo do valor inicial? Observando o gráfico, verificamos que a partir de 22 800 m a pressão de oxigénio nos pulmões começa a ser negativa. Como interpretar essa situação?

Através da análise dos intervalos em

que as funções P_1 e P_2 se reduzem a uma fracção do seu valor inicial, verificamos que a diminuição da pressão de oxigénio nos pulmões é ainda mais rápida que a diminuição da pressão atmosférica. A altitude não parece assim ser muito favorável para a prática desportiva. No entanto, sabe-se que excelentes marcas têm sido conseguidas em certas modalidades precisamente nestas condições. Deveremos procurar então outros factores que possam contrabalançar o efeito negativo da diminuição da pressão.

Um deste factores é a diminuição da aceleração da gravidade. Como sabemos, esta tem o valor de $9.8\ m/s^2$ ao nível do mar. O seu valor em altitude poderia ser determinado de modo experimental. Façamos, em vez disso, um estudo teórico da questão.

A força F de atracção entre dois corpos é dada pela lei de Newton:

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{d^2}$$

sendo m_1 e m_2 as massas dos corpos cujos centros de massa se situam à distância d, e G uma constante universal.

Como o raio da terra é 6366 Km, temos para um corpo de massa de 1 Kg colocado à superfície terrestre:

$$9.8 = \frac{Gm_1}{6366000^2}$$

(sendo m_1 a massa da Terra), ou seja,

$$Gm_1 = 6366000^2 \times 9.8.$$

Deste modo, a uma dada altitude h teremos para um corpo de massa de 1 Kg:

$$F = \frac{9.8 \times 6366000^2}{(6366000 + h)^2}$$

Trata-se agora de estudar esta função. Para isso será conveniente tabelá-la em diversos intervalos e traçar o respectivo gráfico. Para isso de novo o computador será de grande utilidade. Qual o valor da gravidade a diversas altitudes? A que altitude a gravidade se reduz a metade, a um quarto, a um oitavo?

Para compararmos os efeitos da diminuição de pressão de oxigénio nos pulmões e da força da gravidade, poderemos sobrepôr os respectivos gráficos (escolhendo para cada um uma escala adequada — ver figura 4). Será a diminuição da gravidade um factor capaz de contrabalançar a diminuição de oxigénio nos pulmões? Será que isso depende das modalidades desportivas? Poderá ser interessante, neste ponto, alargar a discussão deste assunto a um professor de educação física.

A modelação no currículo de Matemática

Estes exemplos podem constituir boas situações de partida para propor aos alunos. No caso do carteiro, uma vez enunciado o problema, pode-se deixar aos alunos a elaboração do respectivo diagrama e a discussão das melhores estratégias. É, no entanto, importante clarificar as condições-chave do problema (o carteiro regressa ou não ao ponto de partida? como se distribuem as caixas de correio ao longo da rua?). Trata-se de um problema que não exige pré-requisitos especiais exteriores à Matemática, como de resto acontece com muitos problemas actuais de Matemática Aplicada.

O problema do desporto em altitude, pelo contrário, envolve numerosos aspectos de Física que poderão constituir fontes de dificuldades para os alunos. Dentro na perspectiva que os domínios tradicionais de aplicação, devem continuar a ser valorizados[4], procurei mostrar como a sua abordagem pode ser feita de forma simplificada. Se os alunos tiverem já estudado a pressão atmosférica e a lei

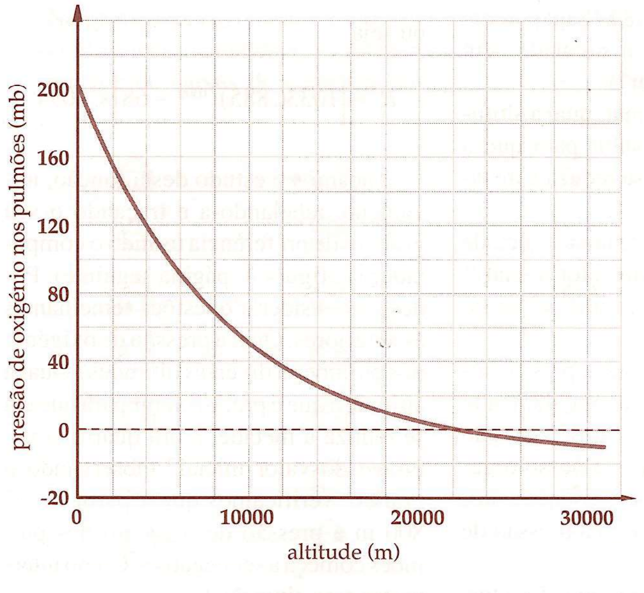

Figura 4

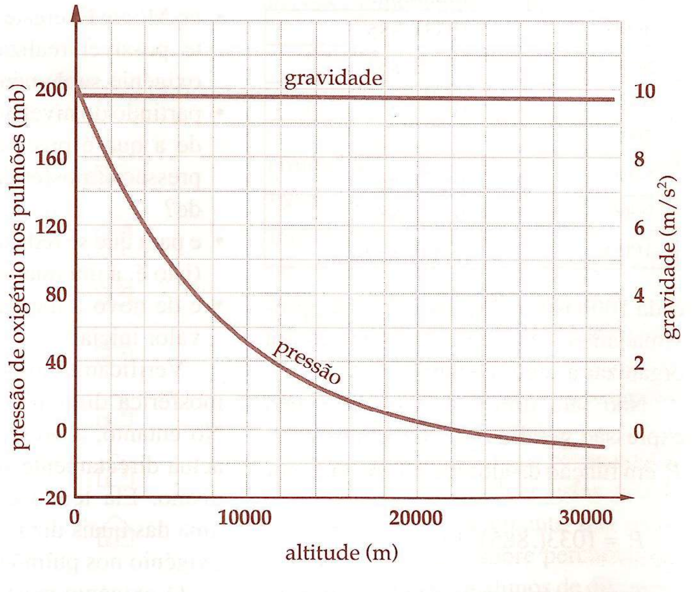

Figura 5

de Newton, terão agora oportunidade para um novo olhar sobre esses assuntos. Caso contrário, servirá de motivação para um posterior estudo mais aprofundado.

Na apresentação destes problemas é necessário que o professor dê ao aluno material para trabalhar. Mas será igualmente importante ter presente a recomendação de Pólya (1945, p. 1): "O professor deve ajudar, mas nem de mais nem de menos, de modo a deixar ao aluno uma parte significativa do trabalho".

Nestas actividades o computador constitui, obviamente, um auxiliar fundamental. Para construir tabelas, para traçar gráficos, comparando valores, fazendo mudanças de escala, etc. Nalguns casos o computador poderá simular através de animações o próprio desenvolvimento de fenómenos dinâmicos. O computador permite a realização de numerosas experiências, estimulando a formulação e testagem de conjecturas.

As interfaces entre a Matemática e a realidade podem aparecer essencialmente de três formas ao longo do processo de ensino-aprendizagem: (a) como ponto de partida para a formulação de novos conceitos ou ideias matemáticas; (b) como exemplos de aplicação de conceitos e ideias matemáticas a problemas concretos, e (c) como situações de modelação, em que se procura fazer o estudo duma dada situação recorrendo se necessário a ferramentas matemáticas diversificadas. Do meu ponto de vista, todas estas três formas são necessárias e devem ser vistas como complementares.

A introdução de novos conceitos e ideias a partir de situações reais, devidamente estruturadas, pode constituir uma importante base concreta para desenvolver os conceitos e ideias pretendidos. Pode igualmente ter um significativo papel motivador, especialmente se as situações forem de natureza problemática e do interesse dos alunos.

A realização de actividades de aplicação, bem definidas, em que os alunos usam os conhecimentos aprendidos, são evidentemente necessárias e devem ser propostas frequentemente — tanto para um melhor esclarecimento daqueles conceitos, como para que os alunos ganhem sensibilidade para o tipo de estruturas e técnicas matemáticas que se utilizam numa variedade de situações.

O estudo global duma situação, percorrendo todo o ciclo do processo de modelação, deve ser realizado uma ou duas vezes ao longo do ano, eventualmente como um projecto que os alunos realizam em grupo. Esta actividade é fundamental para que os alunos se apercebam da interligação entre os vários domínios da Matemática e do poder e limitações de cada um deles (abordagens geométricas, algébricas, algorítmicas, numéricas, lógicas). Esta actividade é igualmente essencial para que os alunos ganhem sensibilidade para os aspectos mais globais do processo de modelação, nomeadamente a concepção geral, a avaliação e a análise crítica dos modelos (Davis, 1988).

Ser competente em Matemática (quer ao nível do cálculo, quer ao nível da resolução de problemas), não implica necessariamente ser competente na sua utilização em situações concretas. Trata-se de competências diferentes, que têm de ser igualmente tidas em consideração pelo currículo desta disciplina, o que só recentemente começou a ser reconhecido ao nível das orientações oficiais (nomeadamente nos novos programas).

Sempre que se trabalha com uma situação real, está necessariamente explícito ou implícito um modelo dessa situação. O conhecimento do alcance e dos limites do processo de modelação matemática, e a capacidade para compreender, explorar, construir e analisar criticamente modelos matemáticos simples, são importantes objectivos que o desenvolvimento da Matemática e das suas aplicações na sociedade moderna colocam como da maior relevância educativa. Valorizar claramente esta perspectiva, é um dos mais sérios desafios que presentemente se põem no ensino desta disciplina.

Notas

[1] Uma descrição mais pormenorizada do processo geral de modelação, bem como dos processos cognitivos usados nesta actividade, com numerosas indicações bibliográficas, encontra-se no meu trabalho indicado nas referências, de onde foi também retirada a figura.

[2] Este problema é retirado de Swetz e Hartzler (1991).

[3] Os elementos para este exemplo foram colhidos em De Sapio (1976).

[4] A este respeito, duas tendências me parecem igualmente negativas: a preocupação de alguns programas de ciências para só estudar os fenómenos de forma qualitativa, evitando o mais possível a Matemática, e a falta de interesse dos professores de Matemática pelos problemas concretos que envolvem as aplicações reais da sua disciplina.

Referências

Davis, P. J. (1988). Applied Mathematics as Social Contract. *ZDM, 88/1*, 10-15.

De Sapio, Rodolfo (1976). *Calculus for the Life Sciences*. San Francisco: Freeman.

Pólya, G. (1945/1957). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. New York: Doubleday (Edição original da Princeton University Press)

Ponte, João Pedro da (1992). Problemas de Matemática e Situações da Vida Real. *Revista de Educação*, Vol 2, Nº 2.

Swetz, Frank e J. S. Hartzler (1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*. Reston, VA: NCTM.

João Pedro da Ponte
Departamento de Educação
Fac. de Ciências, Univ. de Lisboa