

As aplicações da Matemática: a vida quotidiana na sala de aula

Jaime Carvalho e Silva

Introdução

A matemática é geralmente considerada pelo comum dos cidadãos um assunto árido que pouco tem a ver com a vida de todos os dias, excepto talvez em pequenos problemas de cálculo.

Mas, embora possa não parecer, a verdade é que existe uma relação muito íntima e profunda entre a matemática e a vida de todos os dias, e toda a gente é constantemente confrontada com uma multidão de problemas matemáticos de cuja resolução atempada depende a qualidade de vida de todos, e isto não apenas na simples gestão das compras diárias no mercado ou no supermercado.

Senão, vejamos: todos os dias somos confrontados com anúncios de bancos que descrevem a inegável vantagem das suas contas à ordem ou a prazo de modos tão obscuros como aqueles que observamos nos recortes e que incluem afirmações complicadas como a de os juros anuais serem creditados mensalmente ou os juros serem contabilizados diariamente e creditados mensalmente.

Que juros reais nos dá cada conta? Qual a mais favorável? A resposta não é imediata, e é por vezes surpreendente (como no exemplo do anexo I).

Todos os dias nos jornais e na televisão somos bombardeados com gráficos que pretendem descrever as situações mais variadas desde a evolução da situação social à evolução económica de um país ou de uma empresa, e cuja interpretação nem sempre é tão simples como parece, não sendo raro aprecerem mesmo gráficos enganadores.

Quando consultamos um horário de autocarro ou de comboio, temos de fazer várias operações (geralmente cálculo mental não elementar) para determinar qual o horário que mais nos interessa, quando tempo demoramos na viagem, etc.

As sondagens de opinião, muitas vezes ligadas a intenções de voto são o pão nosso de cada dia, sendo frequentes as discussões públicas entre as empresas de sondagens sobre os métodos empregues que levam a resultados diferentes. Qual o mais fiável?

*"A cultura científica
resulta
precisamente da
síntese dos dois
termos
complementares:
a teoria e a prática"*

Sebastião e Silva,
"Guia para a
utilização do compêndio
de Matemática",
2º/3º vol, pág. 10.



Veja crescer dia a dia o seu rendimento mensal.

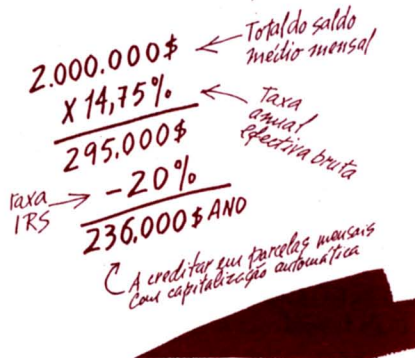
Agora, com a nova Conta Mensal do Banco veja crescer dia a dia o seu rendimento mensal.

Com efeito, a nova Conta Mensal é uma conta a 181 dias em que os juros são contados diariamente e creditados mensalmente na sua conta à ordem.

Com um montante mínimo de abertura de 250 mil escudos, esta nova conta é a forma mais fácil e bem remunerada de rendibilizar as suas poupanças a curto prazo.

Para mais informações dirija-se ao nosso Balcão mais próximo.

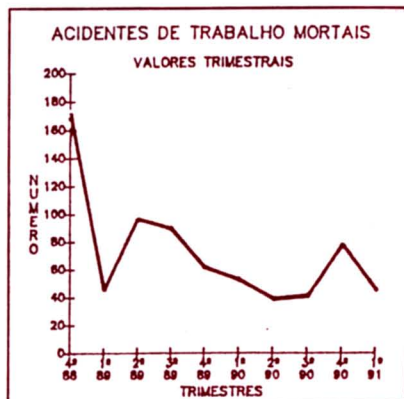
Peça ao seu banco que lhe explique esta conta



A geometria está à nossa volta para onde quer que nos viremos: nas construções, nos monumentos, nas pontes, nos pavimentos com azulejos de formas diversas (mas não de uma forma arbitrária) nas calçadas com formas geométricas tão atraentes em que os portugueses são especialistas, etc, etc, etc.

Ligadas ou não a uma profissão específica formas geométricas variadas aparecem em todas as instâncias da nossa vida profissional ou de lazer. Olhemos à nossa volta com olhos de ver e as formas geométricas saltam à vista, suficientes para encher um catálogo de muitas páginas. E porque é que uma ponte toma uma certa forma e um contentor outra forma totalmente diferente? Certamente não é por acaso!

Num mundo cada vez mais preocupado com questões ambientais e da protecção da natureza, ouvimos falar de modelos matemáticos para prever a evolução do "buraco na camada de ozono", para prever as alterações climáticas, para analisar a despoluição de um rio ou um lago, para estudar qual a quantidade que se pode pescar de uma determinada es-

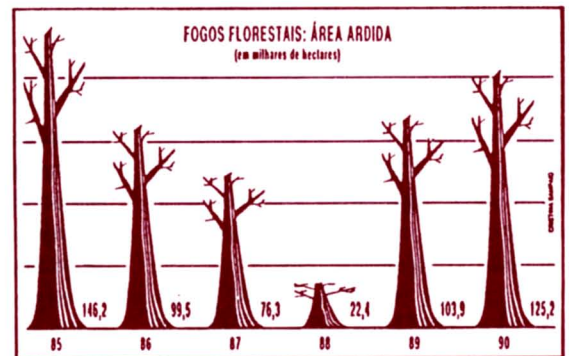


pécie sem a levar à sua extinção. Ou outras questões aparentadas, características do mundo de hoje: a propagação do vírus da Sida, a previsão dos terremotos, a queda de satélites artificiais ou de meteoritos de grandes dimensões. Tudo questões que muito nos preocupam, mesmo quando não conseguimos entrar nos detalhes técnicos de cada uma delas.

Quando queremos comprar um apartamento, geralmente não temos mais do que uma planta à nossa disposição. Não nos resta outra solução senão interpretá-la, isto é, imaginar a três dimensões aquilo que apenas vemos em duas dimensões. Muitas pessoas não se sentem à vontade

ao fazê-lo. Mas isso é geometria!

Quando consultamos uma mapa temos de determinar qual o caminho mais curto entre o ponto em que estamos e aquele para onde pretendemos ir. E se isso implicar tomar dois meios de transporte que andem a velocidades diferentes então o problema não é nada simples.



1º argumento

Estes exemplos da nossa vida quotidiana representam apenas uma pequena parte dos inúmeros exemplos que nos provam a necessidade de a Escola dar uma formação matemática alargada e multifacetada aos nossos jovens, se queremos que a Escola os prepare realmente para os desafios da sociedade moderna.

E isto sem considerar exemplos ligados às características específicas das diversas profissões. Neste caso as necessidades da educação matemática são inquestionavelmente maiores, mas eventualmente variáveis com a profissão. Mas acontece que, para usar na sala de aula exemplos mais ligados à prática de cada profissão as coisas se complicam; por um lado, as situações são normalmente mais complexas, e, por outro lado, o professor de matemática tem mais dificuldade em entrar nos detalhes da outra disciplina. Da minha experiência na disciplina de "Análise Matemática I" do 1º ano da licenciatura em Engenharia e em Física, constato que os exemplos que melhor têm funcionado são aqueles que são menos especializados e mais ligados à experiência quotidiana. Além do mais, para aqueles que começam a estudar actualmente engenharia, biologia, física, etc. na universidade, devido ao facto de terem pouco contacto anterior com as questões ligadas às aplicações da matemática, os exemplos utilizados dificilmente poderão ser muito elaborados.

A educação escolar deve então claramente incluir, além das técnicas matemáticas abstractas, o modo como essas técnicas se relacionam com a realidade, ou seja, deve incluir aquilo que habitualmente se designa por **aplicações da matemática** ou **modelação matemática**.

2º argumento

Mas há mais razões para que o ensino da matemática inclua as aplicações da matemática.

A primeira, e fundamental, é que não é verdadeiramente possível ensinar matemática, de forma eficaz, ensinado apenas a teoria. A teoria não existe por acaso, existe por alguma razão profunda enraizada na realidade do mundo que nos rodeia, e um aluno que não se aperceba dessa razão não pode fazer mais do que repetir mecanicamente a teoria, acabando por a esquecer facilmente, conforme afirmou o grande matemático e pedagogo português José Sebastião e Silva:

"A cultura científica resulta precisamente da síntese dos dois termos complementares: a teoria e a prática."

(in "Guia para a utilização do compêndio de Matemática", 2º/3º vol, pg 10)

"O professor de matemática deve ser, primeiro que tudo, um **professor de matemática**, isto é, deve habituar o aluno a **reduzir situações concretas a modelos matemáticos** e, vice-versa, **aplicar os esquemas lógicos da matemática a problemas concretos**."

(in "Guia para a utilização do compêndio de Matemática", 2º/3º vol, pg 9)

Observamos que estão aqui descritos dois processos totalmente diferentes: primeiro, o de pegar em situações concretas e ver qual a melhor descrição matemática dessa situação; segundo, o de aplicar uma teoria matemática num caso concreto. Destas duas situações tradicionalmente o ensino da matemática contempla apenas a segunda (de forma aliás muito incompleta).

Salientou também José Sebastião e Silva que:

"(...) tudo o que se refere a **aplicações concretas da matemática** é da máxima importância, quer formativa, quer informativa. É principalmente a propósito de **problemas concretos** - e não em abstracto - que interessa fazer a discussão de equações ou sistemas de equações."

(in "Compêndio de Matemática", 1º vol-2º tomo, pg 135-136, ed. GEP)

O que Sebastião e Silva afirma aqui a propósito de equações e sistemas de equações repetiu para muitos outros temas matemáticos, e o mesmo argumento pode ser estendido a quase todos os capítulos do currículo de matemática.

E o facto de um ensino da matemática demasiado abstracto não só não ser adequado, como se tornar ineficaz e até contraproducente, foi salientado por José Sebastião e Silva da seguinte forma:

"Um ensino da matemática que atenda exclusivamente ao aspecto demonstrativo, desprezando as **intuições**, o **método heurístico** e as **aplicações concretas**, pode tornar-se altamente deformativo, em vez de formativo que pretende ser."

(in "Guia para a utilização do compêndio de Matemática", 2º/3º vol, pg 111)

Não se fique com a ideia que a matemática tradicional tem de ser eliminada. Não se pode lidar directamente com a realidade se se desconhecem as técnicas matemáticas necessárias, nem se pode esperar que o aluno as reinvente todas. A aritmética, a teoria dos números, as equações, a geometria euclidiana, a estatística, as inequações, as derivadas, etc., têm de ser estudadas com mais ou menos profundidade, mas esse estudo não pode limitar-se à teoria, à parte abstracta, como tem sido regra em Portugal. O que se observa actualmente é que os alunos rapidamente esquecem o (pouco) que aprenderam, muitas vezes de um ano para o outro (ou até passados um ou dois meses). O que acontece é que também se insiste em demasia em fórmulas a "fixar" ("Existem tabelas de fórmulas, como existem tabelas numéricas, listas telefónicas, catálogos ou enciclopédias. A finalidade é sempre a mesma: evitar um esforço inútil e mesmo inoportável de memória dando maior grau de liberdade ao pensamento - in "Guia para a utilização do compêndio de Matemática", 2º/3º vol, pg 111), que na realidade não se "fixam" nem se poderiam "fixar" pois não só são em demasia como não existe a compreensão por trás para lhes dar significado.

"Um dos objectivos fundamentais da educação é, sem dúvida, criar no aluno hábitos e automatismos úteis, como, por exemplo, os automatismos de leitura, de escrita e de cálculo. Mas trata-se aí, manifestamente, de *meios*, não de *fins*."

(in "Guia para a utilização do compêndio de Matemática", 2º/3º vol, pg 11)

Taxa de juros até 15%*

O B faz-lhe uma proposta. Atraente. Apresenta-lhe a nova Conta Remunerada B. Uma

conta de elevado rendimento. Que lhe dá muito mais que um cartão multibanco, um livro de cheques ou um serviço de pagamento de consumos domésticos. O B lança-lhe um desafio. Porque é que você tem uma conta vulgar se pode ganhar até 15%

de juros na nova Conta Remunerada B ?

PAGAMOS MAIS PELO SEU DINHEIRO

Montantes em contos	Taxas de Juro*
251 a 500	4,66%
501 a 1000	10%
1001 a 2000	11%
2001 a 5000	13%
Mais de 5000	15%

* T. A. E. - Taxa Anual Efectiva

José Sebastião e Silva exprime assim o facto de automatismos como o cálculo não terem sentido se ensinados isoladamente e não integrados num conjunto harmonioso.

Em suma, um ensino da matemática verdadeiramente eficaz deve contemplar de forma equilibrada tanto a teoria como as aplicações.

E este princípio significa que, na universidade, mesmo os alunos de um curso de matemática (qualquer que seja a variante) devem também contactar com aplicações significativas que usem os conceitos que vão aprendendo; só assim têm possibilidade de dominar e até apreender devidamente o alcance desse conceito.

3º argumento

Uma última razão para que o ensino da matemática contemple as aplicações é puramente administrativa: faz parte dos objectivos gerais da disciplina de Matemática em todos os ciclos o ensino das aplicações da matemática. Por exemplo, no segundo ciclo aparecem frases como:

"Aplicar conhecimentos e processos da matemática em situações reais"

No 3º ciclo encontramos:

"Matematizar situações da vida real e reconhecer que fenómenos aparentemente díspares podem ser interpretados pelo mesmo modelo"

E no ensino secundário a situação é semelhante:

"Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução"

No Ensino Superior, como não há sequer programas oficiais, quanto mais objectivos educacionais claramente definidos, não se pode invocar esta razão administrativa. Está tudo dependente da consciência pedagógica do docente; infelizmente, como já referi noutros sítios, existe uma quase total ausência de reflexão no Ensino Superior sobre esta problemática.

Alguns exemplos

Em face de tudo o que foi afirmado anteriormente, há que passar a nossa teoria à prática...

Exemplos concretos não faltam. Basta olhar à nossa volta, folhear os jornais, observar a televisão, para encontrar muitos todos os dias. Certamente muito interessantes e potencialmente mais motivadores para os alunos são os problemas que se relacionam com a realidade local. Olhem à vossa volta. Certamente encontrarão muitos temas interessantes, embora nem todos sejam adequados a uma utilização escolar no nível de escolaridade que se pretende.

Na introdução foram já referidos muitos exemplos que sugerem diferentes utilizações. Noutros sítios tenho vindo a apresentar exemplos de forma mais ou menos informal, como numa sessão temática no "Profmat 91", no Encontro 'Computadores no Ensino da Física e da Química' e na revista 'Nonius'. Alguns desses textos vêm referenciados na bibliografia.

Na universidade tenho-me inspirado sobretudo nos "UMAP modules" em que UMAP designa "Undergraduate mathematics and applications", isto é 'módulos de matemática pré-graduada e aplicações'. Pela sua extensão é impossível apresentar um módulo aqui, pois eles não se limitam a pôr o problema, pretendem guiar o aluno através da resolução, apresentando-lhes os factos necessários para a boa abordagem do problema e semeando questões de resposta rápida ou de discussão ao longo do texto, que vão lentamente contribuindo para a solução final e suas consequências.

Vejamos brevemente alguns temas abordáveis nos diversos níveis, embora de modo diverso (e uma abordagem que funcione com uns alunos não funciona necessariamente com outros — pensemos que a vida quotidiana dos alunos não é uniforme devido às diferenças geográficas e sociológicas).

Jornais aumentam acima do IVA

O AUMENTO global do preço dos jornais a partir de 1 de Abril, provocado pela aplicação do IVA, foi superior aos cinco por cento do imposto introduzido pelo Governo na sua proposta de Orçamento de Estado para o presente ano. Ao efeito deslizante do IVA, induzindo arredondamentos por cima, somaram-se aumentos de preços da iniciativa dos próprios periódicos.

O «Tal e Qual» foi o jornal que mais encareceu relativamente (20%), ao passar de 100\$00 para 120\$00. O EXPRESSO, que passou de 280\$00 para 294\$00, e «O Jornal», que custa 273\$00 contra os anteriores 260\$00, foram os únicos semanários a aumentar rigorosamente cinco por cento. «O Jornal» anunciara, inicialmente, uma subida para 275\$00, mas esta semana, seguindo o exemplo do EXPRESSO, optou por não fazer o arredondamento.

Entre os restantes semanários, «O Independente» (de

260\$00 para 275\$00, um aumento de 5,8%) evoluiu menos que o «Semanário», o qual aproveitou para alinhar o preço pela concorrência (de 250\$00 para 275\$00, subindo 10%). O «Sete» (de 190\$00 para 200\$00, mais 5,3%) e «O Diabo» (de 180\$00 para 190\$00, mais 5,5%) foram, apesar de tudo, mais moderados.

Três diários — «Diário de Notícias», «Correio da Manhã» e «Jornal de Notícias» — aumentaram rigorosamente cinco por cento (de 100\$00 para 105\$00), menos do que o «Público» e o «Diário Económico» (de 110\$00 para 120\$00, uma subida de 9,1%). «A Capital» subiu de 80\$00 para 85\$00 (mais 6,3%), enquanto o «Primeiro de Janeiro» e «O Dia» passavam de 75\$00 para 80\$00 (um acréscimo de 6,7%).

Primeiro exemplo: Recentemente apareceu nos jornais uma controvérsia sobre o aumento de preços dos jornais devido à alteração da taxa de IVA que era de 0% e passou a ser de 5%. Actividade: ler os recortes de jornais e decidir quem tem razão. Pode-se elaborar um relatório final sob a forma de carta ao director do jornal que não tem razão, ou até ao Ministro das Finanças.

Segundo exemplo: Comparar as ofertas de vários bancos, determinar exactamente que juros se receberão em cada período. Tanto se podem explorar estes exemplos de uma forma elementar (percentagens, fracções, proporcionalidade) como de uma forma mais sofisticada (recorrendo a sucessões até chegar à sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ou recorrendo às funções exponencial e logarítmica — a função logarítmica aparece quando se pretende resolver o problema inverso: dado o dinheiro ganho, determinar a taxa de juro que lhe corresponde).

CARTAS AO DIRECTOR

O prazer de ler o PÚBLICO

Sendo leitor assíduo do PÚBLICO, não queria deixar passar em claro um reparo que entendo dever fazer. Perdoem-me se estiver enganado. E já agora esclareçam-me.

Tudo isto a propósito do mais recente aumento do jornal.

Diz uma nota da Direcção que tal aumento se deu em virtude da aplicação do IVA. Até aqui, tudo bem. Não discuto se será certo ou errado. Se deve ser ou não aplicado. Se a referida taxa podia ser maior ou menor.

O que eu não compreendo, e penso que a maioria dos leitores também não, é que me venham "explicar" que tal aumento se deve exclusivamente à aplicação de uma taxa de IVA no valor de 5 por cento.

Ora, se aplicarmos 5 por cento ao anterior preço do jornal, este não poderia custar mais de 115\$00.

Quer dizer que o jornal aumentou de 110\$00 para 120\$00, sendo metade deste aumento para os cofres do Estado e a outra metade para os cofres do... PÚBLICO.

Não tenho nada contra isso. Até porque não me importo nada de pagar mais por um jornal que tenha qualidade, o que até é o caso, mas já me aborrece bastante ser passado por imbecil.

Francamente, o jornal não precisa disso. E se tiverem de fazer comentários às notas do Governo, pelo menos esclareçam totalmente os vossos leitores e, já agora, façam as contas à moda do Porto...

Aproveito para agradecer ao PÚBLICO o prazer que me dá todos os dias de o ler...

José Carlos Pereira de Sousa
Porto

Aumento para facilitar os trocos?

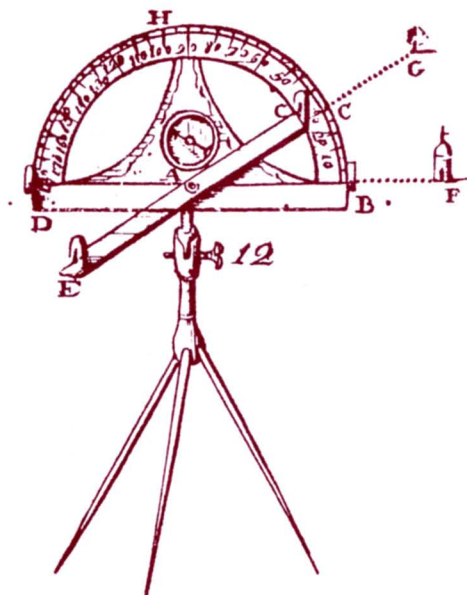
Leitor desde o primeiro número, desejo exprimir o meu mais veemente protesto pelo facto de o PÚBLICO,

à boleia da aplicação do IVA aos jornais, aproveitar para subir novamente o seu preço, descarregando sobre o famigerado imposto o ónus de toda a culpa.

De facto, sendo o IVA de 5 por cento, o aumento a suportar pelos leitores não devia ser superior a 5\$50. E não colhe eventual argumentação que é para facilitar os trocos, pois, a ser assim, era mais justo fixar o preço em 115\$00, sofrendo o PÚBLICO um prejuízo de 50 centavos e não o público um de 450 centavos.

Carlos Costa
Lisboa

N.D. — Os nossos leitores só em parte têm razão. Ao contrário do seu raciocínio, os 5 por cento de IVA não se aplicam sobre o anterior preço, mas sobre o novo preço. É um erro que alguns editores de semanários também cometeram. A aplicação directa do novo imposto levaria o PÚBLICO a custar 115\$80 ao dia de semana e 168\$50 ao domingo. Mas como a distribuição retém uma comissão de 30 por cento (que também se aplica sobre o novo preço, incluindo o IVA), a coisa complica-se. Para não ficarmos prejudicados com a introdução do novo preço e continuarmos a receber, por cada exemplar vendido, exactamente o mesmo do que antes da introdução do imposto, o preço deveria ser: 118\$50 ao dia de semana e 172\$30 ao domingo. Não teremos abusado das cartelas ou das inteligências dos leitores ao fixarmos os novos preços em 120\$00 e 170\$00. Os leitores foram, isso sim, confundidos pelos semanários, que apesar de terem estruturas de formação do preço iguais à nossa se enganaram (?) a fazer as contas e quiseram (?) ajudar Cavaco Silva a arrecadar mais impostos com menos inflação e à custa deles...



Pode-se elaborar um relatório final sob a forma de artigo de uma revista de defesa do consumidor.

Terceiro exemplo: Usar a trigonometria para determinar altura de prédios ou torres e largura de rios; ir mesmo para a rua, construindo instrumentos rudimentares como o da figura junta, que aparece num manual de trigonometria do século passado. Pode-se elaborar um relatório final sob a forma de carta ao Presidente da Câmara ou ao Presidente da Escola.

Quarto exemplo: Determinar as dimensões ótimas de um depósito. Há tantas embalagens comerciais que têm uma forma quase invariável que deverá existir uma explicação para tal. Todos (ou quase todos) os pacotes de um litro de leite têm forma de um certo paralelepípedo. Porque não tentar ver se o paralelepípedo que contém um litro é o que usa a menor quantidade de material. Pode-se elaborar um relatório final sob a forma de carta ao Presidente do Conselho de Administração da Empresa (visto que os nossos resultados ótimos não vão coincidir com os dos pacotes reais).

Quinto exemplo: Ao fim de quanto tempo será possível despoluir um lago? Usando equações diferenciais elementares é possível analisar esta questão e chegar a respostas surpreendentes que justificam um relatório muito forte.

Sexto exemplo: Que quantidade de mexilhões cultivar sem que o meio ambiente fique afectado? Não tanto quanto os industriais gostariam. Quantas baleias e camarões se podem pescar sem afectar a evolução das populações animais? Não tanto quanto os pescadores desejariam. A primeira questão pode ser abordada de forma elementar usando apenas exponenciais e logaritmos, enquanto que a segunda pode ser abordada usando equações diferenciais elementares.

Sétimo exemplo: Interpretar plantas de cidades ou casas, respeitando as respectivas escalas. Podem-se usar exercícios elementares como aquele que aparece no livro "Enigmas com figuras" (Gradiva Júnior) e é aqui reproduzido, ou mais sofisticados em que se elabora a planta a partir do modelo real ou ainda se efectua um modelo a escala reduzida a partir de uma planta.

Tenho utilizado com os meus alunos actividades baseadas no segundo, quarto, quinto, sexto e sétimo exemplos, mas que são demasiado extensas para se poderem reproduzir aqui. Terei muito gosto em enviar uma cópia a quem manifestar interesse em as conhecer. Apenas apresento em anexo duas das questões que usei para avaliação depois de ter já feito abordagens diversas a problemas em contextos semelhantes, ou seja, quando chegou à altura da avaliação os problemas de aplicações também foram considerados, mas o contexto não era novo, já tinha sido trabalhado durante o ano lectivo.

Qual é a casa da planta?

Eis a planta do rés-do-chão de uma casa. És capaz de descobrir a qual destas casas — A, B, C, D ou E — pertence?



Anexo I

Neste período de grande concorrência entre bancos, vemos que cada um publicita as suas taxas de juros de variadíssimos tipos de depósitos. Somos literalmente invadidos pela propaganda dos diversos bancos!

Recentemente um anúncio dizia o seguinte:

"Agora, com a nova conta mensal do Banco X veja crescer dia a dia o seu rendimento mensal.

Com efeito, a nova conta mensal é uma conta a 181 dias em que os juros são contados diariamente e creditados mensalmente na sua conta à ordem.

Com um montante mínimo de abertura de 250 mil escudos, esta nova conta é a forma mais fácil e bem remunerada de rendibilizar as suas poupanças a curto prazo."

Vamos tentar perceber se a conta publicitada é assim tão boa como dizem. Para isso, vamos comparar com outros bancos.

a) Suponhamos que queremos depositar 250 mil escudos a prazo de 181 dias (que tomamos equivalente a 6 meses e a dois trimestres, para simplificar) e que dois bancos oferecem as condições abaixo.

Banco	taxa de juro anual	período de contabilização dos juros
Banco X	15%	todos os dias
Banco A	15%	todos os meses

Subentende-se que os juros são contabilizados às 24 horas do último dia do período de contabilização dos juros, imediatamente depositados na conta e simultaneamente começam a vencer juros (no anúncio acima isso não é muito claro, mas a redacção significa que os juros apesar de serem creditados diariamente não podem ser levantados todos os dias mas apenas no fim de cada mês).

Claro que, nas condições acima, o banco X oferece maior rendimento que os outros. Porquê? (Não é preciso efectuar qualquer cálculo!)

b) Mas acontece que o banco X está mais distante de casa do depositante do que os outros, e que, por isso, gasta mais 600\$00 por mês em transportes do que se depositar no banco A. Compensará depositar o dinheiro no banco X?

c) Agora temos uma situação diferente. Os bancos A e B oferecem mais juros do que o banco X.

Banco	taxa de juro anual	período de contabilização dos juros
Banco X	15%	todos os dias
Banco A	15,25%	todos os meses
Banco B	15,25%	trimestralmente

Em qual devemos depositar o nosso dinheiro?

d) Indicar quantos anos é necessário esperar de modo que 500 contos depositados no Banco X nos dêem um rendimento de 3000 contos.

Anexo II

Um dos problemas importante na embalagem comercial, na construção de depósitos ou na construção de contentores industriais é de determinar, supondo dado um certo volume, qual a menor quantidade de material necessária para o obter.

Feitas medições em várias embalagens de leite e de sumos de formato pequeno, todas com a forma de um paralelepípedo, obtiveram-se os seguintes resultados (se designarmos as suas dimensões por **a**, **b** e **c**):

produto	dimensões			capacidade
	a	b	c	
leite Bon-O-Mel	4,7 cm	6,2 cm	7,6 cm	0,2 l
leite Nesquik	4,7 cm	3,7 cm	11,8 cm	200 ml
leite Grosso	4,1 cm	6,2 cm	8,3 cm	200 ml
sumo L&V	4,1 cm	6,3 cm	8,2 cm	200 ml

Todas as embalagens contêm o mesmo volume de líquido. Qual será a mais económica?

1. Determina qual utiliza menor quantidade de material (isto é, a embalagem que tem menor superfície total); supõe-se que o material é semelhante nas diversas embalagens e tem espessura igual.

Determinemos a embalagem ideal, ou seja, aquela que utilizaria a menor quantidade de material mas conteria o mesmo volume de 200 cm³. Observamos que uma das dimensões é praticamente invariável, certamente de modo a que as crianças peguem facilmente nela. Tanto podemos tomar **a** = 4,7 cm como **a** = 4,1 cm. Consideremos **a** constante, mas não escolhamos para já o valor de **a**.

2. Designando a quantidade de material por **S**, determina os valores de **b** e **c** que tornam **S** mínimo, considerando que o volume se deve manter constante e igual a 200 cm³.

3. Determina a economia em superfície total, para o caso do leite Nesquik, se as dimensões **b** e **c** forem tais que a superfície seja mínima. Qual o ganho em percentagem?

4. Mostra que o valor mínimo da superfície, em função de **a**, é

$$S = 40 \sqrt{2a} + \frac{400}{a}$$

Para cada valor de **a**, a superfície é dada pela expressão acima. Determinemos agora, caso exista, um valor **a** para o qual a superfície **S** seja a menor de todas.

5. Determina o minimizante de **S(a)**. Determina o valor mínimo de **S(a)**. Identifica a forma da embalagem obtida.

6. Determina a economia em superfície total, para o caso do leite Grosso, se as dimensões **a**, **b** e **c** forem tais que a superfície seja o valor obtido em 5. Qual o ganho em percentagem?

Bibliografia

- Abrantes, Paulo, "Viagem de ida e volta", APM, 1988.
- Agudo, F.R.Dias, "A matemática no mundo contemporâneo", Academia das Ciências de Lisboa, Lisboa, 1980.
- Burghes, D.N., et al, "Applying Mathematics: a course in mathematical modelling", Ellis Horwood, Chichester, 1982.
- Burghes, D.N., et al, "Modelling with differential equations", Ellis Horwood, Chichester, 1981.

- Carvalho e Silva, Jaime, "Matemática, dinossauros, mexilhões, baleias e outros bichos (uma digressão pelas aplicações da matemática às ciências naturais)", Sessão temática, Profmat 91.
- Carvalho e Silva, Jaime, "Sobre a proposta de novos programas de Matemática para o Ensino Secundário (10º, 11º e 12º anos)", Educação e Matemática n° 19/20, 1991.
- Carvalho e Silva, Jaime, "Os computadores e o ensino da análise elementar: as aplicações da matemática", Nonius n° 23, Fev 1990.
- Carvalho e Silva, Jaime, "A modelação matemática nas ciências naturais", Encontro "Computadores no ensino da Física e da Química", Coimbra, 1990.
- Carvalho e Silva, Jaime, "Análise Infinitesimal I versus Análise Matemática I - o ensino da análise elementar", Trabalho elaborado para o concurso para Professor Associado de Matemática Pura, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, 1990.
- Jesus, Fernando de, "A utilização da Matemática nas Ciências do Homem" - Actas IV ENCONTRO REGIONAL DO CENTRO, SPM.
- Kooy, Henk van der, "Assessment of mathematical modelling and applications", in "Information Technology and Mathematical Problem Solving Research", Viana do Castelo, Abril 1991.
- Lucas, William F., (ed.), "Modules in Applied Mathematics" (4 vols), Springer-Verlag, New York, 1983.
- Mason, John, "Modelling: What do we really want pupils to learn?", in "Mathematics, teachers and children", The Open University, Hodder and Stoughton, London, 1988.
- Ponte, João Pedro, "Resolução de problemas: da matemática às aplicações", Actas 2º Encontro Nacional de Didácticas e Metodologias de Ensino, Universidade de Aveiro, 1991.
- Projecto Minerva, "Perspectivas interdisciplinares em Física e Matemática", FCT Univ. Nova de Lisboa, 1991.
- Queiró, João Filipe, "Ovelhas, matrizes e computadores", Actas IV ENCONTRO REGIONAL DO CENTRO, SPM.
- "UMAP modules: Tools for teaching, 1977-1979, 1980, 1981", Birkhäuser, Boston.
- Uspenski, V.A., "Algunas aplicaciones de la mecánica a las matemáticas", "Lecciones populares de matemática", Editora Mir.
- Vorobiov, N.N., "Problemas elementales de maximo e mínimo", "Lecciones populares de matemática", Editora Mir.

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra



Cartas à Redacção

Um olhar sobre os novos programas de Física

No último número da revista *Educação e Matemática* [...] foi publicada uma entrevista acerca dos novos programas de Física em que uma das autoras faz uma afirmação que *não traduz a verdade dos factos*. Essa afirmação é a seguinte: "Houve uma 1ª versão que sofreu bastantes críticas no que toca aos programas de Física, e estes portanto não foram homologados.". Sendo um dos autores do anterior projecto, terei o maior prazer em lhe apresentar *documentos* que comprovam o seguinte:

1º- O programa não foi homologado pelo Senhor Secretário de Estado da Reforma Educativa de então com base "nos pareceres de eminentes especialistas e com o conhecimento do Conselho de Acompanhamento da Reforma Curricular".

2º- As críticas foram de facto muitas (pois o projecto foi amplamente divulgado), vieram de praticamente todas as

zonas do país, mas foram *na sua larga maioria favoráveis*, excepção feita à extensão do projecto, particularmente da 1ª versão e quase todas dirigidas a todo o programa e não só à Física até porque o programa foi elaborado por físicos e químicos em trabalho interdisciplinar.

3º- Pouco mais de um mês antes da decisão do Senhor Secretário de Estado o projecto estava tão aceite pelos professores envolvidos na Reforma que decorreu uma acção na Figueira da Foz de onde todos saíram dispostos a iniciar a experiência de lançamento.

4º- Não foi comunicada aos autores qualquer justificação de carácter oficial acerca das razões científicas ou pedagógicas que estiveram na base da não homologação do anterior projecto apesar dos sucessivos apelos dos autores junto dos Senhores Ministros e Secretários de Estado (os autores tomaram conhecimento da decisão por uma colega com quem trabalharam na Figueira da Foz).

Devo adiantar que *particularmente* fomos informados do seguinte (mas a este respeito não temos documentos que o comprovem pelo que estas informações carecem de confirmação):

1º- os "eminentes especialistas" atrás referidos foram três professores universitários todos da área de Lisboa;

2º- o projecto actual está sendo elaborado à boa maneira antiga, apenas estando a ser criticado por um grupo restrito de consultores e por uma Comissão Científica de que fazem parte os referidos "eminentes especialistas";

3º- o actual projecto do programa de Física está totalmente desenhado de qualquer interdisciplinaridade com a parte de Química, mais parecendo tratar-se de programas de duas disciplinas diferentes do que de uma só disciplina".

Jorge António Valadares
Lisboa

Comentário das professoras entrevistadas, *Alda Pereira e Anabela Martins* :

Lamentamos a mágoa que parece transparecer da carta escrita pelo nosso colega Jorge Valadares.

Quanto ao teor da entrevista, reafirmamos o seu conteúdo.