Inflação galopante

Para a minha festa de aniversário, gosto de fazer um grande cocktail Negroni, cuja receita inclui três bebidas: Campari, Gim e Vermute.

Desta vez, quando fui fazer as compras, constatei que os preços tinham subido muito: o Campari 26%, o Gim 5% e o Vermute 20%.

Resolvi fazer contas.

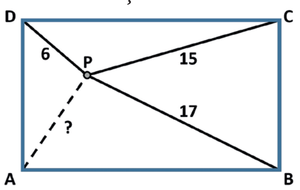
Posso não comprar o Campari, ou posso diminuir o Vermute em 15%. Mas, mesmo assim e em qualquer dos casos, ainda gasto mais 3 euros do que no ano passado.

Quanto pagava eu antes destes aumentos?

Respostas até **06 de janeiro**, *para zepaulo46@gmail.com*

DISTÂNCIA AOS VÉRTICES

O problema proposto no número 175 da *Educação e Matemática* foi o seguinte:



Temos um retângulo [ABCD].

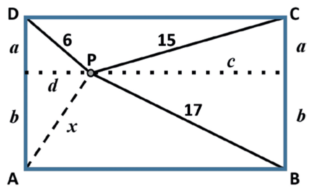
Um certo ponto P dista 17 cm do vértice B, 15 cm do vértice C e 6 cm do vértice D.

A que distância está P do vértice A?

Nota: a figura pode não corresponder à realidade.

Recebemos 14 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Carlos Dias (Silveira), Catarina Ferreira (Viseu), Delfim Guedes (Gaia), Diana Leonardo, Edgar Martins (Queluz), Isabel Viana (Porto), João Pintarroxo (Ponte da Barca), Luana Vale (Guimarães), Luís Bernardino, Mário Roque (Guimarães), Paulo João, Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), e o trio Carlos Faria, Rogério Berrincha & Manuel Saraiva (Covilhã).

O problema foi resolvido praticamente da mesma maneira por 11 dos participantes, traçando por P duas paralelas aos lados do retângulo. No entanto, a Catarina mostrou que bastava apenas uma paralela.



Aplicando o teorema de Pitágoras aos dois triângulos da direita:

$a^2+c^2=15^2$ e $b^2+c^2=17^2$.

Subtraindo uma equação da outra fica

$b^2-a^2=289-225 \Leftrightarrow b^2-a^2=64$ *(Eq. 1)*

Aplicando o teorema de Pitágoras aos dois triângulos da esquerda:

$a^2+d^2=6^2$ e $b^2+d^2=x^2$.

Subtraindo uma da outra fica

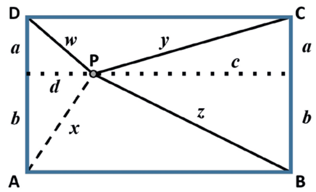
$b^2-a^2=x^2-36$ *(Eq. 2)*

Por (1) e (2) vem $x^2-36=64$ ou $x^2=100$

Como $x>0$ fica $x=10$

A distância de P a A é 10 cm.

O Alberto usou simplesmente o Teorema de Marlen (também chamado teorema da bandeira britânica): Tomando um ponto P interior a um retângulo, a soma dos quadrados das distâncias do ponto P a dois vértices opostos do retângulo é igual à soma dos quadrados das distâncias do ponto P aos outros dois vértices opostos.



O Mário chegou à solução pelo método mostrado anteriormente. Depois, verificando que $x^2=17^2+6^2-15^2$, pensou melhor e acabou a demonstrar com simplicidade o Teorema de Marlen (que ele, tal como muitos de nós, não conhecia).

$x^2+y^2=(b^2+d^2)+(a^2+c^2)=(b^2+c^2)+(a^2+d^2)=z^2+w^2$

O Alberto foi ainda mais longe e mostrou que o Teorema de Marlen também é válido para P no exterior do retângulo e até para P fora do plano.

A Diana usou outro método. Definiu um referencial cartesiano com origem em A.

Sejam $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ tais que as coordenadas dos pontos são:

A(0, 0); B(b, 0); C(b, a); D(0, a); P(x, y)

O ponto P tem de pertencer às seguintes circunferências

$x^2+(y-a)^2=36$ (1)

$(x-b)^2+(y-a)^2=225$ (2)

$(x-b)^2+y^2=289$ (3)

Somando as equações 1 e 3 e subtraindo a equação 2, obtemos:

$x^2+y^2=36+289-225$

$x^2+y^2=100$

Ou seja, o ponto P está à distância $\sqrt{100}=10$ cm do vértice A.

Por estas resoluções fica-se com a suspeita que a solução não depende das dimensões do retângulo.

O Carlos verificou isso mesmo ao usar um programa de geometria dinâmica e foi mais longe. Determinou que, quando o ângulo $P\hat{A}B \approx 70{,}56^\circ$, o retângulo tem uma área máxima de ≈ 252 cm^2, com os lados a medirem aproximadamente 14,45 e 17,45 cm.

Por curiosidade, o retângulo de área mínima (≈ 52cm^2) acontece com o ponto P no exterior e os lados a medirem aproximadamente 12,94 e 4,02 cm.