

A potencialidade em sala de aula das coletâneas de tarefas das turmas-piloto nas Aprendizagens Essenciais de Matemática A: um exemplo com o GeoGebra 3D

JOÃO CARLOS TERROSO

Se está a ler este texto e se encontra a lecionar ou já lecionou Matemática A, concorda comigo que uma das grandes dificuldades dos alunos na aprendizagem da geometria analítica no 10.º ano é a visualização espacial. Aquando da aprendizagem do referencial cartesiano ortogonal monométrico, o “simples” exercício de indicar as coordenadas de um ponto no referencial poder-se-á tornar um pequeno (mas muito pequeno) pesadelo para os alunos, caso estes não estejam habituados à visualização espacial do referencial.

Neste artigo, irei explorar as vantagens da utilização de *software* de geometria dinâmica (em particular, o GeoGebra 3D) para o desenvolvimento das capacidades dos alunos para a visualização espacial de objetos geométricos.

CONTEXTUALIZAÇÃO CURRICULAR

Como tem sido costume no currículo português do ensino secundário, as Aprendizagens Essenciais para a Matemática A (Carvalho e Silva et al., 2023), pressupõem que os alunos no 10.º ano estudem, contextualizado no tema “Geometria”, os referenciais cartesianos ortogonais monométricos no espaço. Neste subtópico, um dos objetivos de aprendizagem apontado é “Identificar coordenadas de pontos do espaço num referencial cartesiano ortogonal e monométrico” (p. 40). Ainda neste âmbito, é proposto como ação estratégica do professor, a utilização do GeoGebra 3D como estímulo para os alunos visualizarem, explorarem e estabelecerem conjeturas que envolvam a geometria no espaço. Também é proposto que o professor desafie os alunos a construir modelos tridimensionais de referenciais no espaço, através da utilização de materiais simples (como cartão, palhinhas ou outros que possam ser considerados pertinentes).

De facto, a utilização de representações físicas – uso de objetos concretos para mostrar, estudar, agir sobre ou manipular ideias matemáticas (Brunheira, 2022) – poderá constituir uma boa oportunidade para desenvolver as capacidades de visualização espacial dos alunos. No entanto, de acordo com Loureiro (2022), tal poderá constituir um desperdício de tempo letivo. Mesmo em anos de estudo em que os alunos já possuem alguma agilidade para a construção de projetos em materiais físicos, o tempo

podrá ser uma condicionante para que o professor não ceda a uma exploração da capacidade de visualização espacial dos alunos através de representações geométricas físicas.

Assim, a tecnologia constitui uma ferramenta que consegue tornar o processo de ensino e aprendizagem deste tópico ágil e rápido, pois através de um ou vários gestos manuais conseguimos entrar no cenário geométrico a que estamos a ser expostos e que pretendemos estudar.

Ainda nas Aprendizagens Essenciais de Matemática A para o 10.º ano, são apresentadas várias ideias-chave. Para conseguirmos desenvolver este tipo de ideias-chave, um dos principais instrumentos de trabalho em sala de aula são as tarefas, pois permitem proporcionar momentos de aprendizagem efetiva (Loureiro, 2022).

Para ajudar a implementar as Aprendizagens Essenciais, os autores disponibilizaram um conjunto alargado de coletâneas¹ de tarefas que ajudam a prática letiva dos professores e permitem perceber como se poderá realizar a aplicação deste conjunto de ideias previstas por estes documentos curriculares.

MANIPULÁVEIS VIRTUAIS, A GEOMETRIA NO ESPAÇO E O GEOGEBRA 3D

Aquando da preparação para a escrita deste artigo, deparei-me com um conceito bastante interessante apresentado por Loureiro (2022), da autoria de Moyer-Packenham e Bolyard (2016). Um manipulável virtual corresponde a “uma representação visual interativa de um objeto matemático dinâmico, potenciada tecnologicamente, incluindo todas as possibilidades programáveis que permitem a sua manipulação, que apresenta possibilidade para construção de conhecimento matemático” (Moyer-Packenham & Bolyard, 2016, p. 13). Ainda Loureiro (2022) reconhece que o GeoGebra constitui um manipulável visual que constitui uma mais-valia para a aprendizagem. Este tem o poder de permitir associar mais do que uma representação do mesmo objeto matemático e chegar a várias possibilidades de visualização das representações dos objetos geométricos e torna a sua manipulação bastante acessível. Além do mais, a

¹ Disponíveis em <http://aem.dge.mec.pt/pt>

predisposição dos alunos para a aprendizagem e para o trabalho aumenta e o seu envolvimento é maior.

Franco e Canavarro (2015) apontam que a utilização de representações tridimensionais no plano poderá dificultar e não garantir a real percepção visual do objeto geométrico. Assim, a utilização de um *software* tridimensional constitui um grande contributo para minimizar estas eventuais dificuldades, pois “permite infinitas possibilidades de pontos de vista de observação do mesmo objeto, possibilitando uma melhor percepção visual deste e facilitando a compreensão da sua forma e de algumas suas propriedades” (Franco & Canavarro, 2015, p. 5). Em específico, os autores referem que o GeoGebra 3D surge como um principal aliado na construção de conceitos geométricos, na compreensão de resultados e demonstrações e na resolução de problemas geométricos em vários contextos matemáticos e/ou não matemáticos.

CARACTERIZAÇÃO DA TURMA

A turma deste estudo integra um curso científico-humanístico de ciências e tecnologias de uma escola secundária no concelho de Odivelas e é composta por 28 alunos, sendo 18 do género masculino e 10 do género feminino. É heterogénea em termos de personalidades e dos conhecimentos e desempenhos na disciplina de Matemática A.

Desde o início do ano, a turma tem vindo a desenvolver um plano traçado por mim em termos de aprendizagem em sala de aula, com muitas propostas de trabalho de grupo, cooperação e trabalho autónomo. É costume as aulas desenvolverem-se em três fases: introdução à aula e à tarefa; trabalho autónomo dos grupos na resolução da tarefa proposta; discussão coletiva com a respetiva conclusão e sintetização dos conhecimentos/conteúdos trabalhados em aula. Claro que existem momentos de exposição teórica dos conteúdos/temas matemáticos. No entanto, este tipo de aula mais expositiva existe em menor número, pois considero que a exploração e aprendizagem de forma autónoma e de forma cooperativa é uma mais-valia para a aprendizagem.

Aquando da proposta da presente tarefa a turma já interiorizou estas diferentes fases de trabalho, sendo já encarado como uma aula rotineira para este conjunto de alunos.

A TAREFA

A tarefa (disponível na secção Materiais para a aula de Matemática, p. 17) foi retirada do conjunto de tarefas da coletânea das turmas-piloto na aplicação dos novos documentos curriculares, dentro do tema da Geometria Analítica.

Esta tarefa divide-se em três partes: na questão 1 os alunos são convidados a familiarizar-se com os referenciais cartesianos ortogonais monométricos no que diz respeito ao eixos, sua denominação e orientação e ao sistema de coordenadas de pontos representados no referencial; na questão 2, os alunos são confrontados com a existência dos planos coordenados e e respetivas equações cartesianas que os definem, bem como

com a divisão do referencial em oito octantes; na questão 3 e 4 os alunos são desafiados a desenvolver a sua capacidade de visualização espacial com a representação de sólidos geométricos no referencial e a definição das coordenadas dos seus vértices, em diferentes contextos, posições e níveis de desafio.

No documento de onde provém a tarefa, no seu resumo, estabelece-se que na aplicação da tarefa “deve ser valorizada a capacidade de visualização dos alunos e o estabelecimento da relação com a componente algébrica” (p. 20). Sem descartar as representações físicas, nas notas e sugestões lê-se que o GeoGebra constitui um “recurso indispensável pela representação algébrica e geométrica que é fundamental neste contexto” (p. 20).

A PROPOSTA DA TAREFA EM SALA DE AULA

Comecei por referir a necessidade de haver um referencial cartesiano em formato 3D. De facto, quando olhamos para um livro, para um ecrã ou para uma fotografia, a imagem que lá surge é uma imagem em 2D, mas que se repararmos provém de um contexto a três dimensões. Na sequência, foi mostrado o referencial cartesiano aos alunos, já com o GeoGebra 3D. Esta primeira manipulação em jeito de apresentação permitiu que os alunos já se apercebessem de qual era o aspeto do referencial e, de forma informal, quais as suas ideias-base. “Existe frente-trás. Existe direita-esquerda. Existe cima-baixo.”

Nesta tarefa, optei por não realizar uma leitura conjunta, pois pretendia desenvolver a capacidade de compreensão, leitura e interpretação textual dos próprios alunos e respetivos grupos. Os alunos foram organizados em grupos de três e quatro elementos, gerados de forma aleatória, com recurso a um *site* da Internet que permite a realização da seleção, o Wheel of Names². Este tipo de organização já é naturalmente desenvolvido em sala de aula pela turma na disciplina de matemática, pelo que não foi estranho aos alunos. Para resolverem a tarefa, os alunos utilizaram os seus telemóveis pessoais, como também é hábito em sala de aula.

Os grupos começaram com a leitura do enunciado e a compreender como funciona o sistema de coordenadas nos referenciais cartesianos ortogonais monométricos. Alguns dos alunos, começaram logo a explorar o GeoGebra 3D, tentando perceber o manipulável virtual que estava a ser considerado. Com esta interiorização do sistema de coordenadas no espaço, os alunos estranharam a escrita formal das coordenadas de um ponto no espaço. O facto de haver uma “nova” terceira coordenada levou a que ficassem reticentes em relação à escrita formal do ponto. No entanto, com o auxílio e algumas indicações minhas, os grupos assimilaram que a escrita é semelhante à escrita das coordenadas de um ponto no plano, com o acrescento de uma terceira coordenada que diz respeito ao novo eixo, o eixo Oz. No meio deste trabalho, os alunos manipularam o GeoGebra 3D de forma natural, pois pretendiam perceber se o *software* os ajudaria a ver como funciona este “novo” sistema de eixos e a forma de escrita matemática formal dos pontos.

² <https://wheelofnames.com/>

Curiosamente, o *software* surgiu na tarefa como aprovação das coordenadas que os alunos definiram para os pontos. De notar, que os alunos tiveram dificuldade em perceber que o GeoGebra 3D tem a funcionalidade do *zoom in* e do *zoom out*, que é um gesto naturalmente interiorizado por eles aquando da utilização do telemóvel.

Depois de algum tempo a trabalhar na primeira questão e depois de conseguirem perceber o sistema base de coordenadas neste tipo de referenciais, os alunos começaram a analisar os planos coordenados e as condições que os definem (figura 1). Um dos grupos solicita a ajuda do professor. O grupo não estava a perceber o significado da notação (pergunta 2.4. a)). O professor tentou dar-lhes uma primeira ajuda, no entanto, Tiago (um dos membros do grupo) deu logo a “dica” de que neste plano Oz é igual a 0 em qualquer ponto. Com isto, o professor percebeu logo que a utilização de um manipulável virtual e sua exploração autónoma pelos alunos foi uma mais-valia para começarem a perceber os referenciais. Ainda nesta questão, outro grupo solicita a ajuda do professor e, mais uma vez, o mesmo acontece. O aluno Ivo deduz mais uma vez que no plano , os pontos devem ter obrigatoriamente Oz é igual a 0.



Figura 1. Exploração dos planos coordenados xOy , yOz , e xOz

Já na questão 3 da tarefa (figura 2), escuto uma conversa num dos grupos. Os alunos Guilherme e Leandro estavam a discutir que a utilização do manipulável virtual ajudava-os na concretização do trabalho que a pergunta exigia. Decidi intervir na conversa:

Professor – Então o que se passa?

Guilherme – Estamos a perceber que sem ajuda do *link* e do GeoGebra a pergunta 3 é bué difícil de fazer.

Leandro – Bué complicada.

Professor – O que acham que aconteceria se vos desse a figura apenas em papel?

Leandro – Seria bem chato, stôr. Assim, com o GeoGebra 3D não!

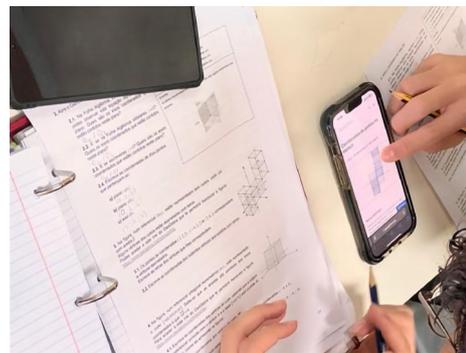


Figura 2. Manipulável virtual auxilia os alunos Guilherme e Leandro na exploração da questão 3.

Avançando nos grupos, apanho o aluno Telmo a tentar resolver a questão 3 diretamente no papel. Depois de estranhar, pede ajuda do professor. O professor (mauzinho que é!) desafia-o a tentar resolver a questão usando apenas a representação em papel da figura. No entanto, acrescenta logo a seguir que o mesmo estava disponível *online* para ser manipulado. O aluno Tiago, não se sentindo ainda confortável com o sistema e vendo a complexidade do desafio, afirmou: “Acho que vou para o modelo do *site* professor. A manipulação do *site* é muito melhor.”

Já na questão 4, deparo-me com um grupo que sentiu dificuldade em perceber o que são os vértices do cubo. Aqui, para os auxiliar, recorro à mesa de trabalho e pergunto “O que são os vértices desta mesa?”. O aluno Simão responde imediatamente que os vértices “são os bicos da mesa” e aponta para os mesmos. Exclamaram imediatamente “Ah! Então já sabemos.” Aqui, a representação física (através dos “bicos” da mesa) assumiu um papel crucial na perceção informal do que é o vértice de um sólido geométrico.

Na questão 4.2 a), Guilherme consegue chegar à resposta das coordenadas dos vértices, recorrendo a conhecimentos informais de vetores (ainda não lecionados). O aluno percebe que o cubo realiza uma translação horizontal no sentido negativo do eixo Ox e que, portanto, as coordenadas do cubo original da questão 4.1. irão sofrer uma redução de 4 unidades na sua abcissa, mantendo-se as restantes iguais.

Guilherme - Stôr, se colocarmos o ponto A na origem (do referencial), o cubo faz uma translação para trás. As coordenadas dos vértices mudam em x.

Na mesma questão, apercebo-me que o aluno Marco, sem a utilização do *link*, está a conseguir visualizar a situação. No entanto, sente dificuldade em perceber a posição do cubo no referencial. Tenta obter a minha aprovação, pois estava a passar junto ao grupo. No entanto, a aluna Marta auxilia o colega e chama à atenção que no *link*, o ponto A está editável e é possível de ser manipulado. O aluno Marco imediatamente procura o manipulável virtual para se auxiliar.

Neste momento, reparo que poucas questões foram feitas pelos alunos na questão 4, o que indica que os grupos conseguiram perceber o funcionamento do referencial e que a manipulação

virtual do cubo (permitida pelo recurso ao *software*) foi uma mais-valia e aceite de forma positiva pela turma. O trabalho em referencial cartesiano no espaço está instalado e é desenvolvido de forma natural e confortável pelos grupos.

De notar, que um dos grupos termina a tarefa antes do tempo estipulado. Decido então propor a realização de exercícios de aplicação do manual escolar. Este grupo aceita bem esses exercícios de aplicação e avança no trabalho com empenho e entusiasmo. Os alunos rececionaram de forma positiva os referenciais cartesianos no espaço, através da proposta de uma tarefa desafiadora, interessante e envolvente.

A DISCUSSÃO NO GRUPO –TURMA

Depois de concluído o trabalho na tarefa, os alunos são convidados a estender a sua discussão e descobertas ao grupo—turma, de forma a se conseguir sintetizar e concretizar as ideias matemáticas desenvolvidas.

Peço voluntários para apresentarem as suas conclusões e descobertas na questão 3. O aluno Marco voluntaria-se para apresentar. Na sua apresentação, Marco começa por manipular no computador da sala o modelo geométrico da questão 4 para a posição *standard* do referencial cartesiano. Na sua exposição (figura 3), Marco escolhe vários pontos do modelo geométrico e descreve à turma os passos que realiza para descobrir as coordenadas dos pontos escolhidos partindo da origem.

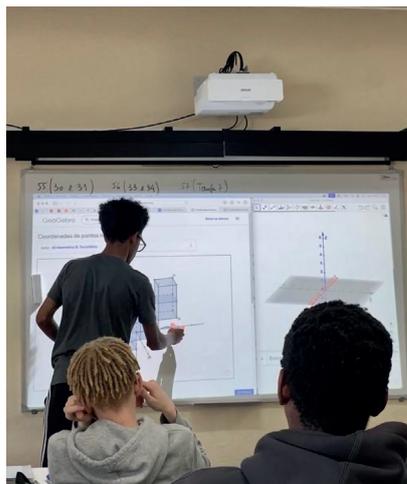


Figura 3. O aluno Marco explica o seu raciocínio para determinar as coordenadas de um ponto, depois de ter manipulado a representação virtual do sólido.

À medida que descreve o percurso, o aluno manipula o GeoGebra 3D para mostrar aos colegas o seu raciocínio. Já confortável com o modelo e sem necessidade de manipulação, Marco escreve no quadro as coordenadas do ponto G de forma incorreta, pois sente dificuldade em perceber e visualizar a sua posição. No entanto, consegue perceber o seu erro e corrige imediatamente a resposta. O aluno Guilherme sugere a Marco que coloque o manipulável virtual numa vista de cima do modelo. Marco roda o modelo e coloca a vista de cima do sólido, sendo que a turma aprova a correção feita por Marco às coordenadas do ponto G.

A aluna Dina pede a Marco ajuda a perceber as coordenadas do ponto I. De forma direta, o aluno manipula o modelo para uma vista lateral e de cima do GeoGebra 3D, ajudando a colega a perceber que no referido ponto a abcissa é nula. Ao visualizar a vista de cima, Marco ajuda a colega a perceber que o ponto está alinhado com a origem, pelo que a sua abcissa é nula. Explica que a sua ordenada é -2 , pois o ponto “andou para a esquerda duas unidades”. A aluna Dina não sente dificuldade a perceber que a cota é 2 , pois na posição *standard* do referencial essa coordenada fica explícita para a aluna.

Na discussão coletiva da questão 4, convido o aluno Guilherme a mostrar as suas conclusões. Deu para perceber que a turma se encontra interessada e entusiasmada com a discussão que está a ser feita. Tal como Guilherme tinha concluído (figura 4), mostra à turma que na questão 4.2. a), o cubo “efetua uma translação de 4 unidades”, pelo que a turma percebe e aprova que esse deslocamento alteraria apenas as abcissas dos vértices do cubo da questão 4.1. Desafio um dos alunos, Gustavo, a indicar as coordenadas de um ponto do cubo, ainda na questão 4.2.a). O Gustavo tenta indicar as coordenadas. No entanto, identifica-as de forma incorreta. Logo, os colegas chamam-lhe à atenção de que algo não correu bem, e, de forma imediata, o aluno corrige as coordenadas. Viveu-se um ambiente de autoajuda e entusiasmo neste momento da discussão. Já na parte final da aula, os alunos antecipam de forma informal e natural a formalização da equação de planos paralelos aos planos coordenados, pois apercebem-se de que “há coisas comuns a alguns pontos. Por exemplo, os pontos da face da trás do cubo têm em comum a abcissa ser 0” o que revela que começam a perceber e sentem necessidade de estudar mais relações neste modelo e no referencial. É neste momento que me sinto satisfeito, pois o “pontapé de saída” está lançado e o “jogo” começou. Que bom!



Figura 4. O aluno Guilherme escreve as coordenadas do cubo depois de reposicionar o cubo no referencial.

A OPINIÃO DOS ALUNOS

Após a aula, pedi aos alunos para darem a sua opinião acerca do trabalho desenvolvido da sua experiência de resolução da tarefa recorrendo ao GeoGebra 3D.

Foi unânime entre os alunos que a utilização do manipulável virtual foi vantajosa para a execução da tarefa proposta. “Com o programa é muito mais fácil responder às questões, porque com ele conseguimos visualizar o plano e os seus eixos e, com isto, identificar mais facilmente os pontos.” (como referiu um dos alunos).

É reconhecido pelos alunos que a utilização de recursos virtuais tornam o processo de aprendizagem mais enriquecedor e estimulante: “A utilização de *software* torna as aulas mais dinâmicas e diferentes. Estes programas conseguem despertar melhor o nosso interesse pela matéria e, na minha opinião, deveríamos continuar a usá-los e a experimentar com eles.”

De forma provocatória, perguntei aos alunos como avaliavam a dificuldade da tarefa com a utilização apenas de papel e lápis. Também foram unânimes as respostas obtidas:

Considero que o nível de dificuldade seria bastante superior, dado que teríamos de imaginar o plano e os eixos para obter as coordenadas dos pontos, e isto é algo que pode resultar desafiante. Além disso, o programa permite-nos girar o plano e mexer nos pontos, oferecendo uma mais ampla visão do referencial e das figuras 3D nele contidas.

EM JEITO DE CONCLUSÃO...

Nesta experiência fica claro que a ideia-chave das Aprendizagens Essenciais na disciplina de Matemática A, recurso sistemático à tecnologia, torna o processo de ensino e aprendizagem interessante, atrativo e estimulante para os alunos. De facto, a utilização de manipuláveis virtuais no contexto da aprendizagem de geometria, em particular da geometria do espaço consegue

auxiliar os alunos na construção das suas aprendizagens acerca das coordenadas de pontos em referenciais cartesianos no espaço. O Geogebra 3D permite a manipulação e a visualização de diferentes perspetivas do referencial no espaço. Tal consegue atrair os alunos para a autoaprendizagem e promove um maior envolvimento destes nas tarefas propostas.

Em 2015, Franco e Canavarro desafiam os leitores da Educação e Matemática no seu artigo relacionado com a exploração da Geometria no GeoGebra 3D... “Aqui fica o incentivo à sua exploração em sala de aula e à partilha dessas experiências.” (p.11). Aqui fica o meu “Aceito o desafio” e reforço a todos os leitores... Vamos explorar?

Referências

- Brunheira, L. (2022) Representações no ensino e aprendizagem da geometria – potencialidades e desafios. *Educação e Matemática*. 166, 57–61.
- Carvalho e Silva, J.C., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C, Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M.E.G., Santos, M.T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais: Matemática A 10.º ano*. Ministério da Educação.
- Franco, V. S., & Canavarro, A.P. (2015). Explorando a Geometria no espaço com o GeoGebra 3D. *Educação e Matemática*. 133, 5–11.
- Loureiro, C. (2022). Uma outra face da utilização do GeoGebra. *Educação e Matemática*. 164, 47– 49.
- Moyer-Packenham, P.S., & Bolyard, J.J. (2016) Revisiting the definitio of a virtual manipulative. In P. S. Moyer-Packenham (Ed.), *International Perspectives on teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives, Mathematics Education in the Digital Era*, 3–21. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_1
- Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES). (2024). *Coletânea de tarefas das turmas piloto – Geometria analítica (Matemática A 10.º ano)*. Direção-Geral da Educação.

JOÃO CARLOS TERROSO

ESCOLA SECUNDÁRIA DE ODIVELAS

APM - ENCONTROS

EMPA 2025 – XXVIII ENCONTRO NACIONAL

MATEMÁTICA NOS PRIMEIROS ANOS

ESE VIANA DO CASTELO

8 NOVEMBRO (PRESENCIAL)
15 NOVEMBRO (ONLINE)

APM apei ipvcese