Aplicações da Matemática: dois exemplos

Ângela Freitas

A extensão dos actuais programas de matemática dificulta que se trabalhe, nas aulas, com aplicações desta disciplina a outras áreas. É, no entanto, reconhecida por muitos a importância desta componente no ensino da matemática.

Quando encontramos uma situação que diz respeito à realidade dos alunos sentimos que a turma reage com agrado e que a curiosidade e o espírito de observação aumentam. Mas a vantagem da utilização das aplicações da matemática não se resume à contribuição que dá para motivar os alunos para a aprendizagem. Como refere Ana Vieira, ajuda-nos a:

"• adquirir uma visão mais equilibrada da Matemática e do seu papel no mundo;
- utilizar a Matemática noutras disciplinas e na sua vida futura, nomeadamente profissional;
- desenvolver o espírito crítico face ao seu uso, correcto ou incorrecto, nomeadamente profissional;
- desenvolver atitudes e competências de natureza geral ligadas à criatividade e à resolução de problemas;
- adquirir e compreender mais facilmente conceitos, métodos e resultados matemáticos e descobrir relações entre conceitos diferentes."[1]

Programação linear

A programação linear é um assunto que permite mostrar uma aplicação da Geometria Analítica, mais concretamente dos domínios planos. Na opinião de Sebastião e Silva:

> "A programação, linear ou não linear, é um dos tipos de problemas que se apresentam hoje com maior frequência em investigação operacional, no domínio da Economia. A sua inclusão no ensino liceal, com carácter elementar, está a tornar-se cada vez mais imperiosa."[2]

A propósito deste assunto, numa turma da área de Economia, foram resolvidos problemas usando o método gráfico da Programação Linear. Foi estudado na aula o problema de optimização "Passeio de fim de ano"[3]. A sua tradução para um problema geométrico e a a verificação das propriedades das rectas, já estudadas, contribuiu, de facto, para uma melhor compreensão dos conceitos.

Foi, ainda, proposto aos alunos a resolução de dois problemas.

1°) Um comerciante pretende adquirir, num prazo não superior a 12 meses, uma quantidade, não superior a cinco toneladas, de um produto que pode ser encomendado a duas fábricas A e B. A fábrica A garante ao comerciante um lucro de 4000$00 por tonelada, mas não pode fornecer mais de três toneladas desse produto. A fábrica B garante apenas um lucro de 3500$00 mas pode fornecer toda a quantidade pretendida. Por outro lado, a fábrica A produz uma tonelada dessa mercadoria em cada dois meses, mas as fábricas não podem trabalhar simultaneamente na produção dessa mercadoria, por exigirem a presença de um mesmo técnico.

De que modo deve ser feita a encomenda de forma a obter o lucro máximo?[4]

2°) Um criador de porcos pretende determinar as quantidades de cada tipo de ração que devem ser dadas diariamente a cada animal por forma a conseguir uma certa qualidade nutritiva a um custo mínimo.

Os dados relativos ao custo de cada tipo de ração, às quantidades mínimas diárias de ingredientes nutritivos básicos a fornecer a cada animal, bem como às quantidades destes existentes em cada tipo de ração (g/Kg) constam do quadro seguinte:[5]

Ingredientes nutritivos \ Ração	Granulado	Farinha	Quantidade mínima requerida
Carbohidratos	20	50	200
Vitaminas	50	10	150
Proteínas	30	30	210
Custo (esc./Kg)	10	5	

Este problema suscitou uma resolução em forma de banda desenhada, por parte de dois alunos (Luís Ribeiro e Sérgio Coutinho) da Escola Secundária de Ermesinde, que se reproduz na página seguinte.

Foram momentos em que a turma (não toda, evidentemente) manifestou interesse superior ao habitual e foi também oportunidade para trabalharem em conjunto.

Torres de Hanoi

As sucessões e o método de indução matemática têm aplicação na resolução do problema posto pelo jogo das Torres de Hanoi, acerca do qual existe uma lenda[6], cujo objectivo é passar uma pilha de discos de diâmetros diferentes, de uma haste para outra, com o menor número de movimentos possível, não podendo um disco ir colocar-se em cima de outro de menor diâmetro.

Por tentativas, usando um disco, depois dois, depois três e assim sucessivamente chega-se à conclusão de que o número de movimentos necessários para deslocar *n* discos é obtido a partir do número de movimentos necessários para deslocar *n* - 1 discos.

Pode definir-se uma sucessão por recorrência, através da qual se obtém o número de movimentos necessários, conforme o número de discos em causa. De acordo com os esquemas do quadro abaixo[7], chega-se a :

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 \times 1$

$a_3 = 3 + 1 + 3 = 1 + 2 \times 3$

Vemos que, no caso dos três discos, 3 é o número de passagens necessárias para mudar os dois discos de menor diâmetro para a haste **B**, 1 é o número de passagens necessárias para mudar o disco maior para a haste **C** e 3 é o número de passagens necessárias para mudar os dois discos menores de **B** para **C**.

Calculemos agora o valor de a_n. Teremos sucessivamente:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 2a_1$

$a_3 = 1 + 2(1 + 2a_1) = 1 + 2^2 a_1$

...

$a_n = 1 + 2a_{n-1} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} a_1$

Como $a_1 = 1$,

$a_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$.

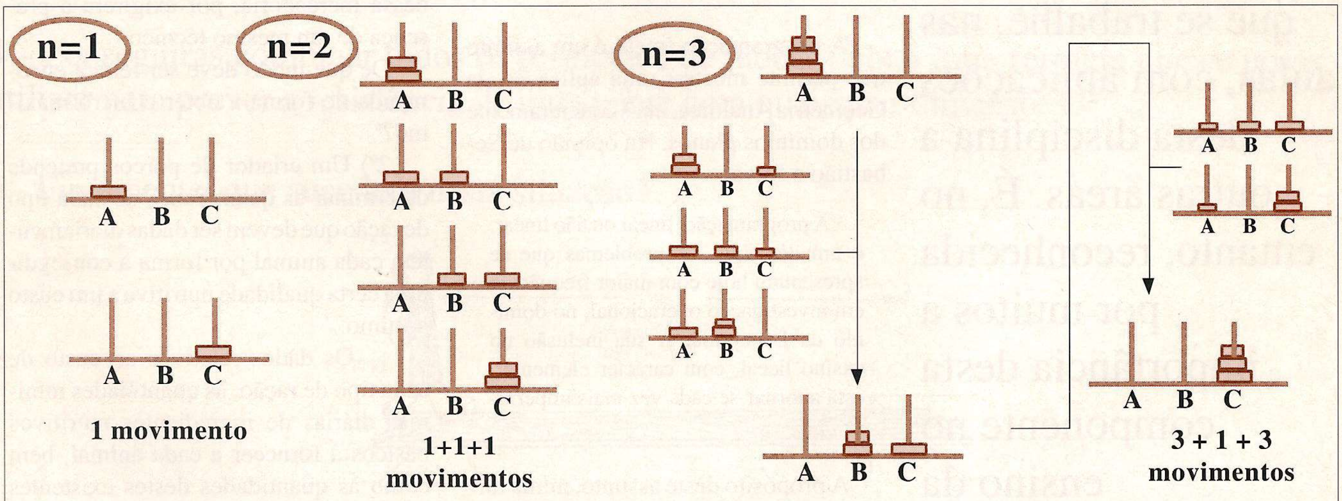
Então, a_n é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 2 cujo primeiro termo é 1. Essa soma é $2^n - 1$.

Apliquemos o método da indução matemática para provar que

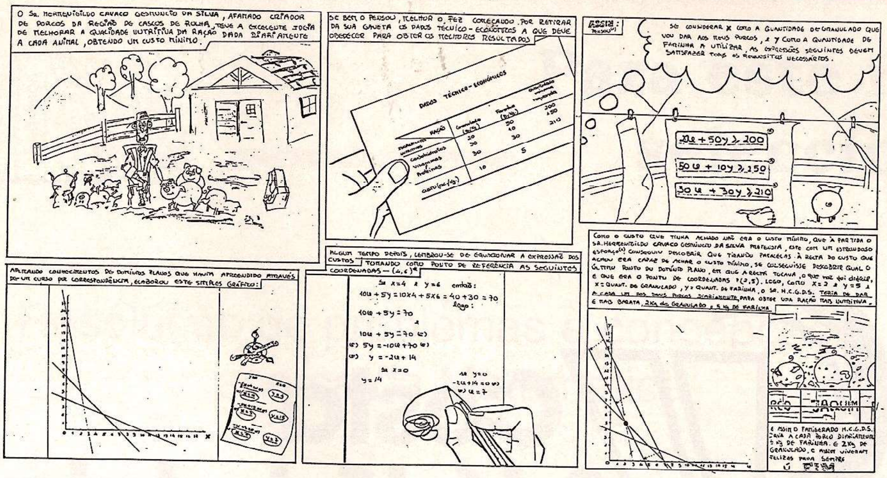
$a_n = 2^n - 1$,

qualquer que seja o número natural *n*.

- A proposição é verdadeira para $n = 1$: $a_1 = 2^1 - 1 = 1$.
- Suponhamos que é verdadeira para n, ou seja, que é válida a igualdade $a_n = 2^n - 1$.
- Provemos que é verdadeira para $n + 1$, isto é, que é verdadeira a igualdade $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$:
  $a_{n+1} = 1 + 2a_n = 1 + 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$,
  como queríamos demonstrar.



Pretende-se, em cada caso, mudar os discos da haste A para a haste C



Legendas da banda desenhada:

a) O Sr. Hermenegildo Cavaco Gesmúncio da Silva, afamado criador de porcos da região de cascos de rolha, teve a excelente ideia de melhorar a qualidade nutritiva da ração dada diariamente a cada animal, obtendo um custo mínimo.

b) Se bem o pensou, melhor o fez, começando por retirar da sua gaveta os dados técnico-económicos a que deve obedecer para obter os melhores resultados.

c) Assim pensou:
Se considerar x como a quantidade de granulado que vou dar aos meus porcos, e y como a quantidade de farinha a utilizar, as expressões seguintes devem satisfazer todos os requisitos necessários.

d) Apurando conhecimentos de domínios planos que havia apreendido, através de um curso por correspondência, elaborou este simples gráfico:

d) Algum tempo depois, lembrou-de equacionar a expressão dos custos, tomando como ponto de referência as seguintes coordenadas: (4,6)

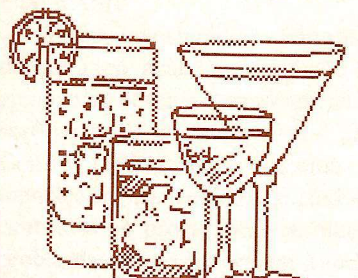
e) Como o custo que tinha achado não era o custo mínimo, que à partida o Sr. Hermenegildo Cavaco Gesmúncio da Silva pretendia, este, com um estrondoso esforço, conseguiu descobrir que tirando paralelas à recta do custo que achou era capaz de achar o custo mínimo, se conseguisse descobrir qual o último ponto do domínio plano, em que a recta tocava, o que não foi difícil, e que era o ponto de coordenadas $P(2,5)$. Logo, como $x = 2$ e $y = 5$ e x= quant. de granulado, y = quant. de farinha, o Sr. H.C.G.D.S. teria de dar a cada um dos seus porcos, diariamente, para obter uma ração, mais nutritiva e mais barata, 2Kg de granulado e 5 kg de farinha.
E assim, o famigerado H.C.G.D.S. dava a cada porco diariamente 5 Kg de farinha e dois kilos de granulado e assim viveram felizes para sempre.

Referências:

1) *Actas do Profmat de 1989* organizadas por Eduardo Veloso e Henrique Guimarães, A.P.M., pág. 458.
2) *Guia para a utilização do compêndio de Matemática*, 1° volume, Edição GEP, Lisboa, 1975, pág. 71.
3) *M10*, Paulo Abrantes e Raul Fernando Carvalho, Texto Editora, Lisboa, 1983, pág. 303.
4) *Guia para a utilização do compêndio de Matemática*, 1° volume, Edição GEP, Lisboa, 1975, pág. 72 e 73.
5) *Programação Linear*, Volume I, Manuel Ramalhete, Jorge Guerreiro e Alípio Magalhães, Mac Grw-Hill, 1984, pág. 5.
6) *Matemáticas Recreativas*, Y. Perelman, Litexa, Portugal, pág. 118.
7) *Profmat nº2*, Setembro de 1986, 2ª edição, 1987, pág.75 e 78.

Ângela Freitas
Esc. Sec. de Ermesinde

Fins de Tarde na nova sede da APM
Todas as sextas-feiras, durante o terceiro período escolar!



A partir das 5 da tarde; convívio, um pouco de matemática, e de novo convívio. Se vive em Lisboa e arredores, esteja atento ao correio.