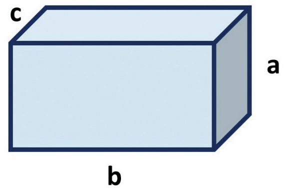
O volume do paralelepípedo

As arestas de um paralelepípedo retângulo medem um número inteiro de centímetros.

A área total da sua superfície é 284 cm2.

Qual é o seu volume?



(Respostas até 11 de setembro, para zepaulo46@gmail.com)

TRÊS CORREDORAS

O problema proposto no número 170 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

> *Às 9h00, três corredoras partem do mesmo ponto de um circuito, a Beatriz e a Carla num sentido, a Alda no sentido oposto. Correm todas a velocidades constantes. A Beatriz demora 40 minutos a dar uma volta, a Carla demora 1h12 e a Alda exatamente uma hora.*
>
> *A que horas a Alda e a Beatriz se cruzam pela primeira vez?*
>
> *Se continuassem sempre a correr, haveria algum momento em que as três estivessem no mesmo ponto do circuito? Se sim, a que horas aconteceria isso pela primeira vez?*

Recebemos 12 respostas:

Alberto Canelas (Queluz), Carlos Dias (Silveira), Delfim Guedes (Gaia), Duarte Lopes (Vizela), João Pereira, João Pintarroxo (Ponte da Barca), Letícia Carvalho (Vizela), Mário Roque (Guimarães), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Rodrigo Lopes (Guimarães), Turma EFA-B3 do EPC, e o trio Carlo Faria, Rogério Berrincha & Manuel Saraiva (Covilhã).

Primeira questão

O comprimento do circuito não é importante para a resolução e, por isso, vários leitores definiram-no por um parâmetro (D, d ou e) ou por um número (1 ou 360). Usaremos aqui o valor 1.

As velocidades das três corredoras serão então

$$v_B = \frac{1}{40},\ v_C = \frac{1}{72},\ v_A = \frac{1}{60}.$$

Como salienta o trio da Covilhã: *"ambas as atletas têm o mesmo tempo t de corrida e o ponto de encontro será tal em que a soma das distâncias percorridas pelas duas atletas até esse momento terá que ser igual ao comprimento do circuito".*

$$v_A \times t + v_B \times t = 1 \Leftrightarrow \frac{t}{60} + \frac{t}{40} = 1 \Leftrightarrow t = 24$$

A Alda e a Beatriz cruzam-se pela primeira vez às 9h24.

Segunda questão

Já vimos que a Alda e a Beatriz se encontram de 24 em 24 minutos.

Como diz o trio covilhanense, as três amigas reúnem-se *"pela primeira vez, quando B e A se cruzarem entre si no mesmo momento em que, ou C e A, ou B e C, também se cruzarem entre si."*

Demos agora a palavra ao Mário. *"Poderemos começar por determinar, por exemplo, de quantos em quantos minutos é que a Beatriz passa pela Carla, dando-lhe (mais) uma volta de avanço… Neste caso, deveremos procurar as soluções da equação:*

$$\frac{t}{40} - \frac{t}{72} = k \quad \text{sendo } k \in N \text{ o nº de voltas de avanço}$$

Chegamos a t=90k. Ou seja, a Beatriz e a Carla encontram-se no mesmo ponto do circuito de 90 em 90 minutos."

Logo, o tempo que as três corredoras demorariam a reunir-se vai ser o mínimo múltiplo comum de 24 e de 90, que é 360 minutos (ou 6 horas).

A resposta é, portanto, às 15h00.

Houve outros processos de resolução. O Duarte criou os gráficos das funções sinusoidais da posição das amigas e descobriu as soluções através dos pontos de interseção. A Letícia fez uma listagem exaustiva dos momentos de reencontro das corredoras, duas a duas. O João Pereira resolveu o problema com o Geometer's Sketchpad. A Turma EFA-B3 do EPC fez um excelente vídeo com uma animação em GeoGebra e a explicação oral do método utilizado.

O Alberto fez notar que, até às 15h00, A e B cruzaram-se 15 vezes, A e C 11 vezes, B e C 4 vezes.

O Carlos, o Mário e o Alberto acrescentaram ainda que, até essa hora, a Alda teria dado 6 voltas ao circuito, a Beatriz 9 e a Carla 5.

Nota final

As três corredoras voltam a encontrar-se porque os tempos que demoram a dar uma volta são números racionais. Se um dos tempos fosse irracional, tal nunca aconteceria. Por exemplo, se o tempo da Alda fosse 19π (≈59min 41,4s) por volta, as três nunca mais voltariam a encontrar-se simultaneamente, mesmo que ficassem indefinidamente a correr.