Sobre um problema de geometria

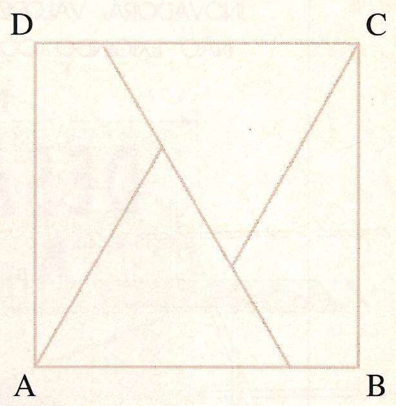
J. S. Cabral

Nas VIII Olimpíadas Nacionais da Matemática de 1990, categoria B, 1ª eliminatória, foi apresentado o problema indicado ao lado.

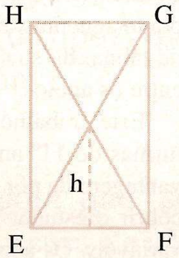
As "sugestões" para a resolução deste problema indicam duas soluções: uma envolvendo conhecimentos de trigonometria e a outra envolvendo conhecimentos de geometria analítica. Julgo que a resolução de qualquer problema se torna tanto mais "interessante" quanto mais simples forem os métodos usados, ou, por outras palavras, quanto mais rudimentares forem os conhecimentos necessários para a sua resolução.

Seguindo esta orientação, procurou-se um processo que estivesse ao alcance dum aluno do 9º ano de escolaridade, isto é, sem utilizar nem trigonometria nem geometria analítica.

Na figura ao lado, [ABCD] é um quadrado. Os dois triângulos indicados são ambos equiláteros e os seus lados medem 1. Quanto mede o lado do quadrado?



Coloquemos inicialmente os dois triângulos equiláteros de lado 1 como se indica na figura.



Nestas condições os lados do rectângulo $[EFGH]$ têm os seguintes valores:

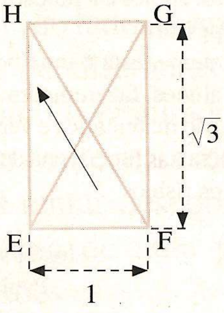
lado $[EF]$: $\overline{EF}=1$, por ser o lado do triângulo equilátero dado;

lado $[EH]$: o valor deste lado será o dobro da altura do triângulo equilátero de lado 1, ou

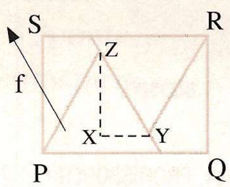
$$h=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Então $\overline{EH}=2h=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

A figura será então



Vamos agora fazer "deslizar" o triângulo inferior no sentido da flecha **f**; ele será deslocado simultaneamente para a esquerda e para cima de forma a obter-se a figura



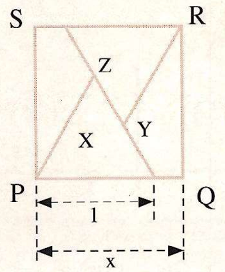
que se pretende seja um quadrado, ou, por outras palavras, que seja $\overline{PQ}=\overline{PS}$.

Designando por d_e a deslocação para a esquerda $d_e=\overline{YX}$, a deslocação para cima, $d_c=\overline{XZ}$, será

$$d_c=\sqrt{(2d_e)^2-d_e^2}=\sqrt{3}\,d_e$$

Seja x o valor do lado do quadrado, isto é, o valor a determinar.

Ora $\overline{XY}=x-1$ (é a deslocação para a esquerda, d_e) e $\overline{XZ}=\sqrt{3}\,(x-1)$ (porque $d_c=\sqrt{3}\,d_e$).(v. fig. seguinte)



Então será $\overline{PS}=\sqrt{3}-\sqrt{3}\,(x-1)$ (altura inicial menos $\overline{XZ}$)

Portanto $x=\sqrt{3}-\sqrt{3}\,(x-1)$

ou $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

Ao nível do nono ano de escolaridade o resultado estava encontrado. No entanto pode-se ainda escrever

$$x=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1},$$

ou finalmente $x=3-\sqrt{3}$.

J. S. Cabral
Esc. Sec. da Amadora