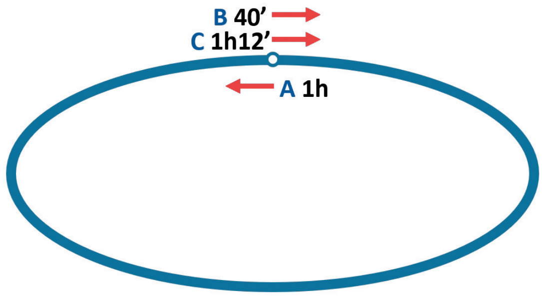
TRÊS CORREDORAS

Às 9h00, três corredoras partem do mesmo ponto de um circuito, a Beatriz e a Carla num sentido, a Alda no sentido oposto. Correm todas a velocidades constantes. A Beatriz demora 40 minutos a dar uma volta, a Carla demora 1h12 e a Alda exatamente uma hora.

– A que horas a Alda e a Beatriz se cruzam pela primeira vez?

– Se continuassem sempre a correr, haveria algum momento em que as três estivessem no mesmo ponto do circuito? Se sim, a que horas aconteceria isso pela primeira vez?



Respostas até 28 de março, para *zepaulo46@gmail.com*)

PONTUAÇÕES DESCONHECIDAS

O problema proposto no número 168 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

O Manuel e o Rogério disputaram uma série de partidas de um jogo em que não há empates. O vencedor de cada partida ganha um certo número inteiro de pontos e o derrotado perde um número inteiro de pontos, sempre os mesmos em todas as partidas.

No final, o Manuel ficou com 14 pontos e o Rogério com 3.

– *Quanto vale cada vitória? E cada derrota?*
– *Quantas partidas venceu cada um deles?*

Recebemos 13 respostas:

Albertina Tavares, Alberto Canelas (Queluz), Carlos Dias (Silveira), Delfim Guedes (Gaia), Diana Leonardo, Isabel Viana (Porto), João Oliveira, José Paulo Coelho (Moura), Mário Roque (Guimarães), Paulo João, Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Vítor Fernandes (Guimarães), e a dupla Rogério Berrincha & Manuel Saraiva.

As várias resoluções começaram praticamente da mesma forma. Primeiro, designaram-se as variáveis a usar:

M - nº de vitórias do Manuel (e derrotas do Rogério),
R - nº de vitórias do Rogério (e derrotas do Manuel),
v - nº de pontos ganhos por cada vitória,
d - nº de pontos perdidos por cada derrota.

Pelo enunciado deduz-se que estas variáveis são números inteiros maiores que 1, como vários leitores tiveram o cuidado de reforçar.

Definiram-se depois as duas equações resultantes dos dados do problema:

$Mv - Rd = 14$ (eq. 1)

$Rv - Md = 3$ (eq. 2)

Temos apenas duas equações para quatro incógnitas, o que parece insuficiente. Mas, como veremos, o facto de todas elas serem números inteiros positivos irá ajudar.

A partir daqui, os processos de resolução começaram a divergir. Aproveitando sugestões e abordagens de várias propostas, mas sobretudo a do João Oliveira, podemos elaborar uma versão clara e sintética.

Somando membro a membro as duas equações, temos

$(M+R).v - (M+R).d = 17 \Leftrightarrow (M+R).(v-d) = 17$ (eq. 3)

Os dois fatores do produto obtido são números inteiros. Sendo M+R positivo, v-d também o será.

Como 17 é um número primo, os seus divisores são apenas 1 e 17. Esses serão os valores dos dois fatores da equação (3). Como M+R tem de ser maior ou igual a dois, concluímos que

$M+R = 17$ e $v-d = 1$ (eq. 4 e 5)

Subtraindo agora, membro a membro, as equações (1) e (2), temos

$(M-R).v + (M-R).d = 11 \Leftrightarrow (M-R).(v+d) = 11$ (eq. 6)

Como 11 é um número primo, os seus divisores são apenas 1 e 11. Esses serão os valores dos dois fatores da equação (6). Como v+d tem de ser maior ou igual a dois, concluímos que

$M-R = 1$ e $v+d = 11$ (eq. 7 e 8)

Usando as equações (4) e (7)

$$\begin{cases} M + R = 17 \\ M - R = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = 9 \\ R = 8 \end{cases}$$

Usando as equações (5) e (8)

$$\begin{cases} v - d = 1 \\ v + d = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6 \\ d = 5 \end{cases}$$

Conclusão:

O Manuel venceu 9 partidas e o Rogério venceu 8.

Cada vitória vale 6 pontos e cada derrota corresponde à perda de 5 pontos.

Nota: José Paulo Coelho acrescentou ainda um programa em Python que resolve o problema.