Slalom

Estes materiais para a aula de matemática foram extraídos da brochura "Problemas e investigações com tecnologia", publicada pela APM em 2014, que inclui enunciados e resoluções de tarefas propostas pelo grupo de trabalho T³ da APM.

Propõe-se que os alunos descubram uma função que descreva um bom caminho entre bandeiras de um slalom. Uma vez que representações gráficas de funções polinomiais, exponenciais, trigonométricas, logarítmicas ou logística podem definir boas trajetórias, a tarefa pode ser realizada nos três anos do ensino secundário.

No artigo "Impacto do uso de diferentes representações sobre a aprendizagem de funções" de Helena Rocha publicado na página 43 desta revista, a autora dá-nos um olhar sobre as diferentes representações que surgem na realização desta tarefa.

Apresenta-se de seguida a proposta de resolução retirada da referida brochura. Os ficheiros tns da calculadora gráfica estão acessíveis online no site da EeM, junto ao pdf deste material para a sala de aula.

Para cada uma das questões existe uma infinidade de funções que satisfazem as condições exigidas, pelo que as propostas de resolução apresentam apenas exemplos dessas funções.

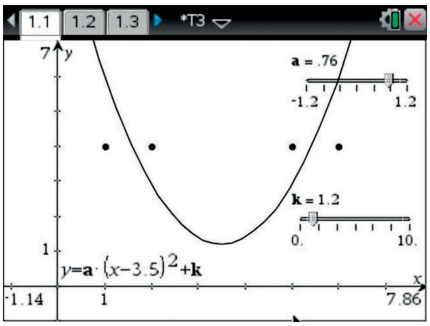
1. Considerando a família de funções quadráticas

$$f(x)=a\,(x-h)^2+k,\ a\in R\backslash\{0\}\ \text{ e } k,h\in R.$$

Pode tomar-se como abcissa h do vértice da parábola a abcissa do ponto médio das bandeiras centrais e definir a família de funções quadráticas seguinte:

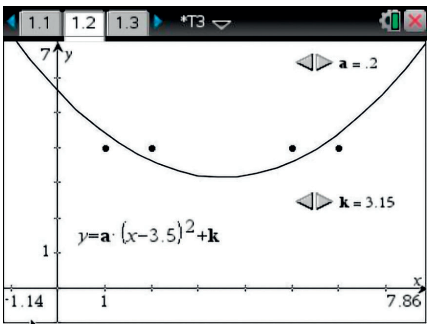
$$f(x)=a\,(x-3{,}5)^2+k,\ a\in R\backslash\{0\}\ \text{ e } k\in R$$

Inserem-se seletores para a e k. Por experimentação modificam-se os valores dos parâmetros a e k até obter uma parábola nas condições do enunciado. Se a=0,76 e k=1,2 obtém-se o gráfico seguinte:



Assim, a parábola representada pela função $f(x)$=0,76 $(x$-3,5$)^2$+1,2 é uma possível trajetória para o esquiador fazer o seu percurso.

Para um percurso mais suave e mais curto pode usar-se $f(x)$=0,2 $(x$-3,5$)^2$+3,15



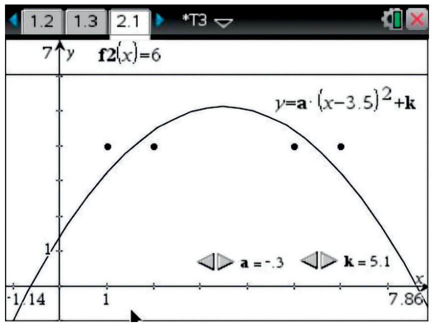
Nota: Pode usar-se, também a família de funções

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)+4,\ a\in R\backslash\{0\}\ \wedge\ x_1\in\ ]1,2[\ \wedge\ x_2\in\ ]5,6[$

e inserir seletores para a, x_1 e x_2 (x_1 e x_2 representam as abcissas dos pontos de ordenada 4 pertencentes à parábola), obtendo uma função que verifique as condições impostas.

2. Para que o esquiador não passe pelo público, basta impor que a<0 e k<6 na expressão $f(x)=a\,(x-3.5)^2+k,\ a\in R\backslash\{0\}$ e $k\in R$.

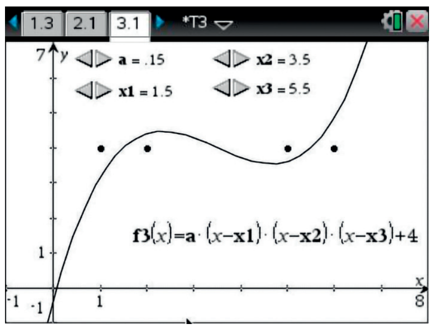
Por exemplo, se a=-0,3 e k=5,1 tem-se:



3. Para que a trajetória do esquiador passe nas portas e no intervalo entre elas considere-se a família de funções cúbicas seguinte:

$f(x)=a(x-x_1)\ x-x_2\ (x-x_3)+4,\ a\in R\backslash\{0\}\ \wedge\ x_1\in\ ]1,2[\ \wedge\ x_2\in\ ]2,5[\ \wedge\ x_3\in\ ]5,6[$, x_1, x_2 e x_3 representam as abcissas dos pontos de ordenada 4 que pertencem ao gráfico da função.

O gráfico seguinte foi obtido para a=0,15; x_1=1,5 ; x_2=3,5 e x_3=5,5



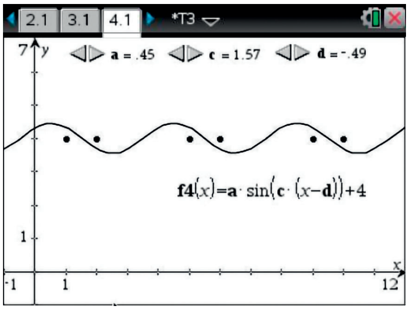
4. Uma possível solução é:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & ,x<1 \\ -0.48(x-3.5)^2+6 & ,1\le x\le 6 \\ 3 & ,x>6 \end{cases}$$

5. Marcam-se os pontos (9, 4) e (10, 4) para obter uma nova porta e insere-se a expressão $f(x)=a\ sin\ (c(x-d))+4$, $a,c\in R\backslash\{0\} \wedge\ d\in R$

Inserem-se seletores para *a*, *c* e *d*. Por experimentação modificam-se os valores dos parâmetros *a*, *c* e *d* até obter uma curva nas condições do enunciado.

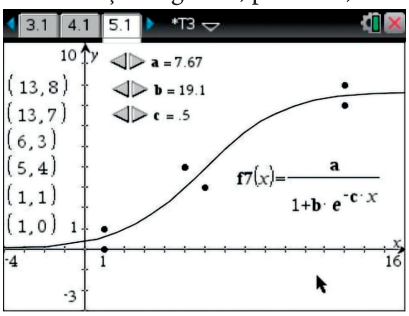
Podem escolher-se os valores dos parâmetros tendo em conta uma amplitude pequena, o período da função e o seu deslocamento na horizontal, por exemplo a=0,45; $c=\frac{\pi}{2}$ e d=-0,49.



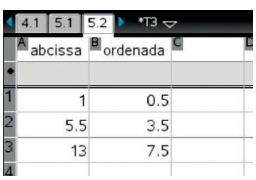
6. A função logística cujo gráfico é a trajetória de um slalom que passa nas três portas sem lhes tocar, é obtida pela família de funções: $f(x)=\frac{a}{1+b\times e^{-cx}}$, $a\in R^+ \wedge\ b,c\in R$.

Inserem-se seletores para *a*, *b* e *c*. Por experimentação modificam-se os valores dos parâmetros *a*, *b* e *c* até obter uma curva nas condições do enunciado.

Pode escolher-se um valor para *a* próximo de 8 e dado que $f(0)=\frac{a}{1+b}$ toma-se, por exemplo, a=7,67 e $f(0)$=0,38 e obtém-se b=19,1 e a visualização seguinte, para c=0,5:

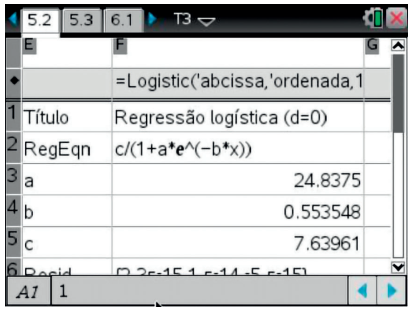


Pode também recorrer-se a uma página de listas e folha de cálculo. Supondo que o percurso inclui os pontos médios das portas, representados pelas suas abcissas e ordenadas na folha de cálculo seguinte:



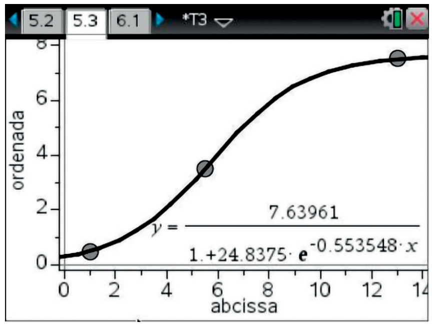
	A abcissa	B ordenada
1	1	0.5
2	5.5	3.5
3	13	7.5

Pede-se o cálculo de uma regressão logística e obtém-se:

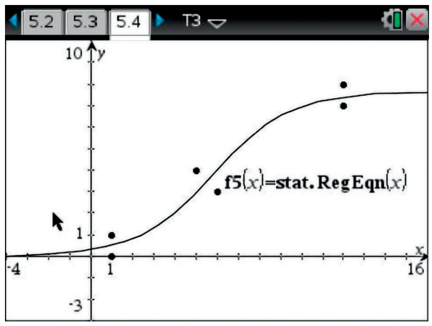


	E	F
◆		=Logistic('abcissa,'ordenada,1
1	Título	Regressão logística (d=0)
2	RegEqn	c/(1+a*e^(-b*x))
3	a	24.8375
4	b	0.553548
5	c	7.63961

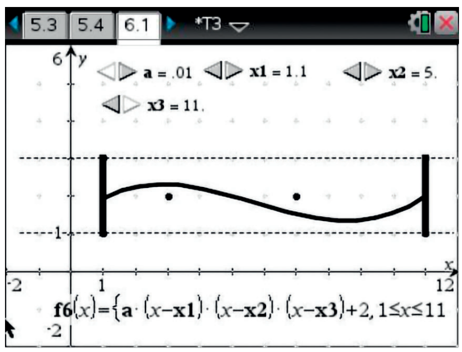
Ou recorrendo a uma página de dados e estatística:



Voltando a uma página de gráficos a partir da regressão calculada anteriormente:



7. A trajetória apresentada no gráfico seguinte, representada pela expressão $f(x)=0{,}01(x-1{,}1)(x-5)(x-11)+2$, para $x\in[1, 11]$, não penaliza a prova do Márcio.



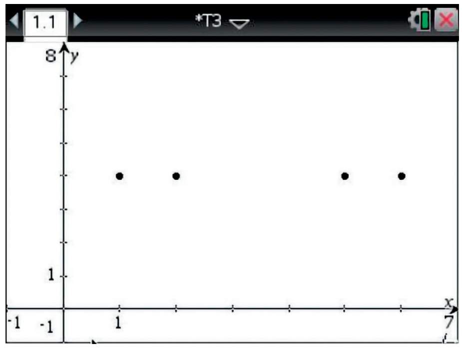
Grupo de trabalho T³ da APM

Slalom

Nas provas de Slalom, o esquiador tem de fazer um percurso contornando bandeiras ou passando entre duas bandeiras que formam uma porta.

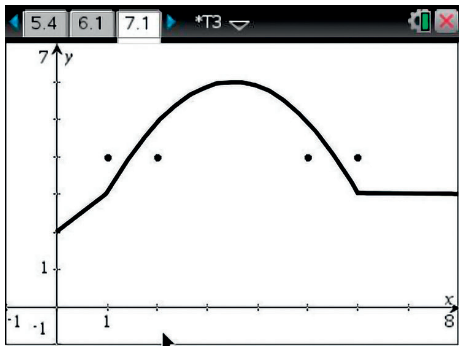
– Define uma janela com $-1 \leq x \leq 7$ e $-1 \leq y \leq 8$.
– Representa os pontos (1, 4), (2, 4), (5, 4) e (6, 4) que serão as bandeiras do Slalom.

1. Descobre uma trajetória do esquiador que seja definida por uma função quadrática e que passe nas duas portas sem tocar nas bandeiras.



2. O público que assiste à prova ocupa a zona do plano definida por $y \geq 6$, encontra uma nova trajetória quadrática do esquiador que não passe pelo público.
3. Define por uma função cúbica a trajetória do esquiador, que passa nas portas e no intervalo entre elas.

4. Na figura ao lado está representada a trajetória realizada pelo campeão suíço que venceu este Slalom. Encontra a expressão de uma função por ramos com esta representação.
5. Representa ainda os pontos (9, 4) e (10, 4) para obter mais uma porta e descobre uma trajetória sinusoidal nas condições das perguntas anteriores.

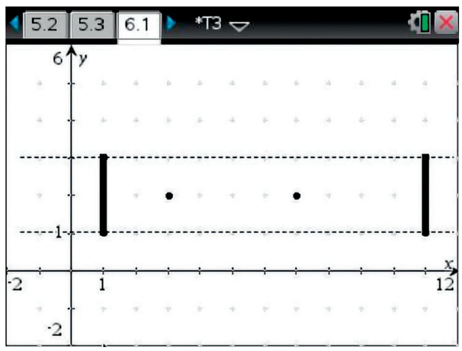


6. Visualiza uma nova janela com $-4 \leq x \leq 16$ e $-3 \leq y \leq 10$ e marca os pontos (1, 0), (1, 1), (5, 4), (6, 3), (13, 7) e (13, 8) para posição das bandeiras.

   Determina uma função logística cujo gráfico seja a trajetória de um slalom que passe nas três portas sem lhes tocar.

7. O Márcio participa numa prova de gincana com a sua bicicleta. Num dos exercícios tem de atravessar um retângulo desenhado no solo, de um lado até ao lado oposto, fazendo slalom entre dois pinos, sem lhes tocar e sem pisar os lados do retângulo, situações que o penalizam. Entenda-se que fazer slalom entre os pinos significa passar o primeiro por um dos lados (esquerda ou direita) e passar o segundo pelo outro lado.

   A figura ao lado pretende representar uma planta do local da prova, onde se pode visualizar o retângulo (entre as retas de equação y=1 e y=3), o lado de partida (na reta de equação x=1) e o lado de chegada (na recta de equação x=11). Os pontos mais a cheio no interior do retângulo representam os pinos.



   Encontra uma trajetória possível para a prova do Márcio, sabendo que não pode ter penalizações, mas que seja o gráfico de uma função cúbica na escala determinada pelo referencial.