Problema dos produtos

A tarefa aqui apresentada foi proposta na formação de formadores para as Aprendizagens Essenciais de Matemática A, do Ensino Secundário, recentemente homologadas, e visa promover um conjunto de aprendizagens no tema de Sucessões, bem como promover conexões matemáticas, nomeadamente com álgebra e funções. A tarefa foi construída com base na proposta intitulada "Pair Products", disponível no site do NRICH (https://nrich.maths.org/pairproducts), um projeto de desenvolvimento curricular da Universidade de Cambridge. Assim, tratando-se de uma tarefa de cunho exploratório, que envolve sequências de números, daremos ênfase à sua resolução com recurso à folha de cálculo e à possibilidade de estabelecer conexões com outros tópicos matemáticos. Destacamos que a tarefa permite:

– descobrir e analisar regularidades e padrões em sucessões numéricas (11.º ano): são relevantes os conceitos de ordem e termo; progressão aritmética; razão e termo geral;
– revisitar funções (10.º ano): é oportuno o conhecimento da função quadrática, em particular, das suas representações analítica e gráfica e transformações geométricas do gráfico.

Algumas das ideias chave das Aprendizagens Essenciais são materializadas nesta tarefa, nomeadamente a resolução de problemas, as conexões matemáticas, o raciocínio matemático, o desenvolvimento do pensamento computacional e o recurso sistemático à tecnologia, bem como a prática de comunicação matemática, utilizando diversos registos matemáticos. Espera-se, de um modo geral, que os alunos façam conjeturas a partir de experiências realizadas com o apoio da folha de cálculo e que provem algumas dessas conjeturas.

Apresenta-se a seguir uma possível resolução da tarefa, que inclui diversas experiências, explorações e, sobretudo, a deteção e análise de padrões.

Na primeira questão, vamos executar 3 experiências. Por exemplo, num grupo, cada aluno pode escolher uma sequência diferente de 4 números naturais consecutivos:

Caso 1: Consideremos os números 10, 11, 12, 13

Neste caso, temos

$$10\times13=130$$

$$11\times12=132$$

O segundo produto (entre os números do meio, ou produto interior) é maior do que o primeiro produto (entre os números das pontas, ou produto exterior).

Caso 2: Consideremos os números 25, 26, 27, 28

Neste caso, temos

$$25\times28=700$$

$$26\times27=702$$

O segundo produto é maior do que o primeiro produto. E observa-se que a diferença é igual à do caso anterior, ou seja, igual a 2.

Caso 3: Consideremos os números 71, 72, 73, 74

Neste caso, temos

$$71\times74=5254$$
$$72\times73=5256$$

O segundo produto é maior do que o primeiro produto. E a diferença continua a ser igual às dos casos anteriores, ou seja, igual a 2.

Assim, parece encontrar-se uma regularidade. O produto do segundo pelo terceiro termo foi sempre maior do que o produto do primeiro pelo quarto termo e a diferença entre os dois produtos foi sempre igual a 2 unidades. Está encontrado um padrão que leva a uma conjetura: o resultado será o mesmo em qualquer outro caso, nas mesmas condições.

Para provarmos esta conjetura, teremos de considerar qualquer sequência de 4 números consecutivos, o que significa que o primeiro termo da sequência poderá ser um número natural qualquer.

Avançando para a segunda questão, percebemos que aquilo que explica a diferença entre os dois produtos é a relação entre os termos da sequência: o segundo é o primeiro mais 1; o terceiro é o primeiro mais 2; o quarto é o primeiro mais 3, como se vê no esquema. Quando multiplicamos o primeiro pelo quarto, obtemos o primeiro multiplicado por si próprio, mais 3 vezes o primeiro. Quando multiplicamos o segundo pelo terceiro, obtemos o primeiro multiplicado por si próprio, mais 2 vezes o primeiro, mais 1 vez o primeiro, **mais 2** (Figura 1). Portanto, existirá sempre uma diferença de 2 unidades entre os dois produtos, qualquer *que seja* o primeiro natural escolhido.

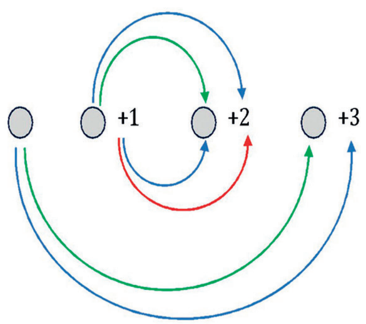


Figura 1. Multiplicação do primeiro termo pelo quarto e do segundo pelo terceiro

Usando um dos casos considerados anteriormente, o esquema apresentado conduz ao resultado:

$$10\times13=10\times(10+3)=10^2+30$$
$$11\times12=(10+1)\times(10+2)=10^2+10+20+2=10^2+30+2$$

Ainda relativamente à resolução da segunda questão, vamos considerar as possíveis respostas de dois alunos, tecendo algumas considerações sobre os raciocínios por eles desenvolvidos.

Aluno 1:

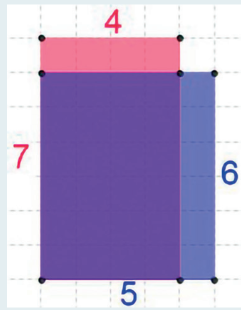
Reparei que o produto do par exterior era sempre duas unidades inferior ao produto do par interior.

Posso explicar tal facto, representando esses números naturais consecutivos por: n, $n+1$, $n+2$, $n+3$.

Com o par exterior: $n(n+3)=n^2+3n$

Com o par interior: $(n+1)(n+2)=n^2+3n+2$

Aluno 2:



Desenhei um diagrama no qual o produto de cada par de termos é representado pela área de um retângulo. O produto do par exterior é representado pelo retângulo encarnado e o produto do par interior pelo retângulo azul. A área púrpura é comum a ambos, sendo que a área da tira encarnada é duas unidades menor do que a área da tira azul. Sendo assim, o produto do par exterior é inferior em duas unidades ao produto do par interior.

As duas respostas mostram que qualquer dos alunos compreendeu o padrão que se observa quando se experimentam várias sequências de 4 números naturais consecutivos. Ambas as resoluções procuram explicar a razão dessa regularidade, o que é uma das principais finalidades do raciocínio dedutivo e, em particular, constitui uma forte motivação para chegar a uma prova. Note-se que o Aluno 1 afirma: "Posso explicar tal facto…" e o Aluno 2 afirma: "Sendo assim…". Ambos estão a argumentar matematicamente para concluírem acerca da validade do resultado, isto é, que a diferença entre os dois produtos será sempre igual a 2, independentemente dos quatro naturais consecutivos considerados.

A resolução do Aluno 1 recorre à representação algébrica e apresenta os passos necessários para provar o resultado; por seu turno, a resolução do Aluno 2 usa uma representação de natureza geométrica, estabelecendo uma relação entre o produto de dois números naturais e a área de um retângulo, o que se revela interessante e pertinente, neste contexto. A comparação entre as áreas dos dois retângulos evidencia claramente a diferença entre os produtos. Qualquer dos dois alunos desenvolve raciocínio matemático. No 1.º caso, há uma evidente capacidade de tradução da situação para linguagem algébrica, que permite um processo de generalização e de prova. No 2.º caso, há uma estratégia de representação visual que permite sustentar um argumento e induz uma generalização, apesar de se tratar de um esquema que se apoia num caso particular (a sequência de números: 4, 5, 6, 7). É de admitir que o processo de generalização tenha sido suficientemente alcançado, pois o mesmo esquema geométrico funcionaria se fossem tomados quaisquer outros 4 números naturais consecutivos. Poderá ser útil e instrutivo fazer essa experiência no GeoGebra, como se mostra na Figura 2, em que o valor do primeiro termo da sequência pode ser alterado, com uso de um seletor.

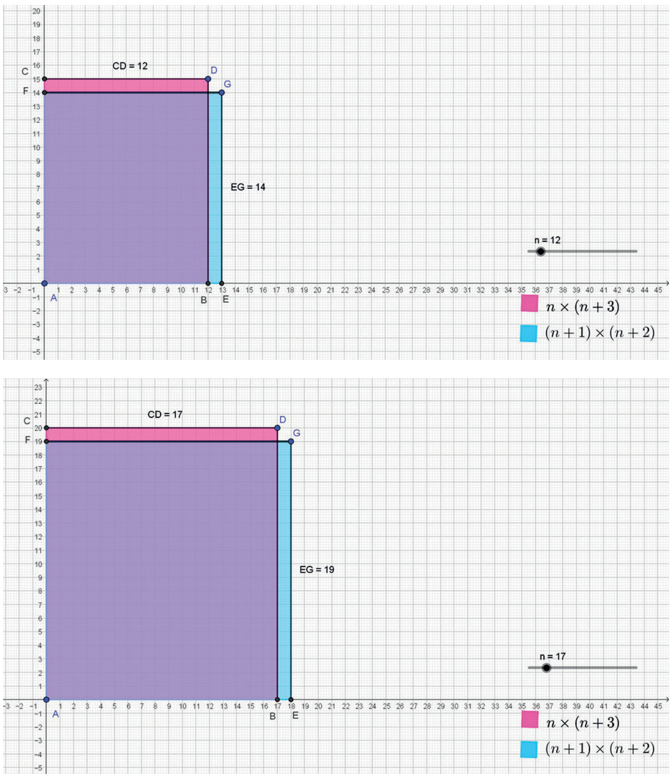


Figura 2. Representação geométrica da diferença entre o produto exterior e o produto interior, para diferentes valores de n (n=12, n=17)

Nas questões 3 e 4 é proposta a utilização da folha de cálculo. Esta é uma ferramenta claramente adequada para trabalhar sobre as várias questões colocadas. As explorações sugeridas estão relacionadas com a situação inicial (questão 1), mas introduzem variantes. Uma das variantes consiste em usar sequências em que os números seguem uma progressão aritmética com uma razão diferente de 1. De uma forma sumária, estamos perante a situação genérica de tomar um conjunto (finito) de termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Com recurso à folha de cálculo, poderemos desenvolver diferentes abordagens:

1. Experimentar e Investigar
2. Prolongar/Explorar

O ficheiro Excel com o nome "Problema dos produtos_Excel" (acessível online no site da EeM, junto do pdf deste material para a sala de aula) inclui duas folhas, cada uma das quais relativa a uma dessas abordagens.

Na folha "Experimenta_Investiga" estão criadas cinco sequências de termos consecutivos de uma progressão aritmética, em que se pode modificar o 1.º termo e a razão, em células reservadas para o efeito (células A2 e A4, respetivamente). As diversas sequências construídas têm quantidades diferentes de termos (4, 5, 6, 7 e 8 termos). São calculados, para cada sequência, o produto do 1.º termo pelo último (produto exterior) e o produto do 2.º termo pelo penúltimo (produto interior). São também calculadas as diferenças entre os dois produtos.

Nesta abordagem, podem fazer-se múltiplas experiências.

– Manter a razão da progressão aritmética (P.A.) e alterar o 1º termo. Verificamos que as diferenças entre os produtos não dependem do valor do 1º termo.
– Analisar a relação entre a diferença dos produtos e a razão da P.A. Por exemplo, para r=1, as diferenças entre os produtos têm valores: 2, 3, 4, 5, 6, conforme o número de termos da sequência. Para r=2, as diferenças entre os produtos têm os valores: 8, 12, 16, 20, 24. Para r=3, as diferenças entre os produtos têm os valores 18, 27, 36, 45, 54. A conjetura que se poderá formular envolve o quadrado da razão da P.A. Aparentemente, as diferenças entre os produtos são dadas por pr^2 em que p é igual a 2, 3, 4, 5, 6 (nos casos experimentados). Portanto, o valor de p está relacionado com a quantidade de termos da P.A. Para uma sequência de 4 termos consecutivos, tem-se p=2; para 5 termos, tem-se p=3; para 6 termos, tem-se p=4; para 7 termos, tem-se p=5 e para 8 termos, tem-se p=6.

Em suma, a ideia que resulta da investigação é a seguinte: a diferença entre os dois produtos (interior e exterior), numa sequência de k termos consecutivos de uma P.A. de razão r, tem o valor $(k\text{-}2)r^2$. Esta conclusão pode ser confirmada algebricamente, usando a expressão do termo geral de uma progressão aritmética de razão r e calculando os dois produtos:

$$u_1\, u_k = u_1 \times [u_1+(k\text{-}1)r] = u_1^2 + u_1\,(k\text{-}1)r$$
$$u_2\, u_{k\text{-}1} = (u_1+r) \times [u_1+(k\text{-}2)r] = u_1^2 + u_1\,(k\text{-}2)r + u_1\,r + (k\text{-}2)\,r^2$$

Na folha "Prolonga" vamos analisar uma nova questão. Neste caso, construímos uma coluna com os primeiros termos (por exemplo, 50 termos) de uma progressão aritmética u_n e vamos considerar as sucessivas sequências de 4 termos consecutivos que se encontram, "percorrendo" os termos da P.A. Para cada conjunto de 4 termos consecutivos, calcula-se o produto interior e o produto exterior, definindo-se, dessa forma, as sucessões dos produtos exteriores e interiores, ou seja, as sucessões:

$u_n\, u_{n+3}$ e $u_{n+1}\, u_{n+2}$

A questão que iremos explorar é a forma como dependem tais sucessões do termo inicial da sequência de 4 termos, ou seja, vamos assumir cada um dos produtos como dependente do termo u_n. Qual é o tipo de relação que se obtém? Representando as variáveis (independente e dependente) num gráfico XY (Figura 3), obtemos uma curva que sugere uma variação quadrática, para qualquer dos casos (produto exterior e produto interior).

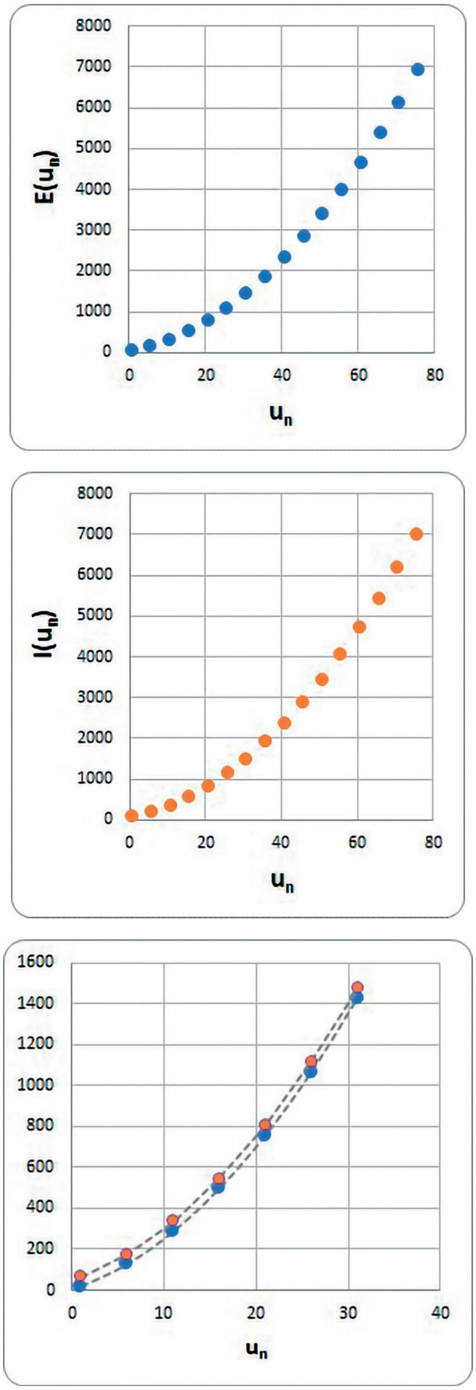


Figura 3. Gráficos obtidos na folha de cálculo, para o caso de u_1=1 e r=5

Adicionando uma linha de tendência ao gráfico, usando a opção Polinomial de grau 2, nota-se um perfeito ajuste da linha aos pontos do gráfico. A equação da linha de tendência pode ser exibida no gráfico e a confirmação da respetiva expressão pode ser obtida analiticamente.

Conclui-se que o produto exterior é dado pela expressão $E(u_n)=u_n^2+3ru_n$ e que o produto interior é dado por $I(u_n)=u_n^2+3ru_n+2r^2$. Os dois gráficos podem ser relacionados, notando-se que os respetivos pontos pertencem aos gráficos de funções quadráticas que diferem entre si por uma constante:

$$I(x)\text{-}E(x)=2r^2$$

Este resultado generaliza o que foi obtido na primeira exploração e pode ser enunciado como se segue. Seja um número real x e os três números que se obtêm a partir de x por adição sucessiva de uma constante r (não nula), isto é: x, $x+r$, $x+2r$, $x+3r$. Então, o produto do primeiro pelo quarto e o produto do segundo pelo terceiro são funções quadráticas de x; as duas funções diferem entre si por um valor que é igual ao dobro do quadrado da constante.

$$E(x)=x^2+3rx$$
$$I(x)=x^2+3rx+2r^2$$

Como se referiu inicialmente, foi dado especial realce, nesta tarefa, à utilização da folha de cálculo, em virtude das suas inegáveis potencialidades para a realização de diversas explorações numéricas que envolvem procura de regularidades, conjeturas e demonstrações, tendo por base o trabalho com sucessões. O princípio de funcionamento da folha de cálculo (gerar e armazenar dados numéricos que se relacionam e organizam em tabelas) ajusta-se plenamente à representação de sucessões numéricas. A manipulação de parâmetros é facilitada pela folha de cálculo, sobretudo quando é importante alterar determinados valores e verificar os efeitos produzidos, dado que as fórmulas são recalculadas e os valores automaticamente atualizados. Além das funcionalidades de cálculo relacional, a folha de cálculo permite a criação de gráficos, nomeadamente gráficos de dispersão, que permitem a visualização e a identificação de relações funcionais entre variáveis. O recurso à folha de cálculo permite, evidentemente, apoiar e estimular o raciocínio indutivo, a formulação de conjeturas, a descoberta de padrões, bem como o pensamento computacional. Na folha intitulada "PENSA COMP" são sugeridas várias formas e práticas de pensamento computacional que são promovidas pelo recurso à folha de cálculo no âmbito da presente tarefa.

Susana Carreira
Universidade do Algarve

Problema dos produtos

1. Considera quatro números naturais consecutivos. Multiplica o primeiro pelo quarto e multiplica o segundo pelo terceiro. Por exemplo, tomando a sequência 10, 11, 12 e 13, as multiplicações pretendidas terão os resultados 130 e 132, respetivamente. Repete o processo com outras sequências de 4 números consecutivos. O que observas? Será que acontece sempre o mesmo?

2. Como explicas tal facto? Prova o resultado a que chegaste.

3. Utilizando uma folha de cálculo, compara o produto do primeiro número pelo quarto com o produto do segundo número pelo terceiro, quando se trata de:
   - 4 números ímpares consecutivos;
   - 4 números pares consecutivos;
   - 4 múltiplos de 3 consecutivos (ou múltiplos de 4 ou de 5…);
   - 4 números espaçados de 3 em 3 unidades, com início num número qualquer, tais como, 2, 5, 8, 11, por exemplo.

   Quais foram as conclusões a que chegaste?

4. Utilizando novamente a folha de cálculo, (podes retomar o que fizeste anteriormente para a questão 3) compara o produto do primeiro pelo último número com o produto do segundo pelo penúltimo número, considerando agora mais termos, como por exemplo:
   - 5, 6, 7, 8 números naturais consecutivos;
   - 5, 6, 7, 8 números pares ou ímpares consecutivos.

5. O que achas que influencia estas regularidades? O primeiro termo da sequência? O número de termos? O incremento entre termos consecutivos?...