Raciocínio visual
Parente pobre do raciocínio matemático?

Manuel Joaquim Félix da Silva Saraiva

O raciocínio visual desempenha um papel muito importante no trabalho diário dos matemáticos. A abordagem visual é um enorme potencial para gerar significado na aprendizagem da Matemática. A utilização do computador abre as portas à realização deste potencial.

O contacto com os alunos das nossas escolas tem-me levado à constatação do pouco uso que é feito, por eles, das figuras e dos diagramas na sua actividade matemática e, mesmo, na resolução de simples problemas do dia a dia.

Um mero problema de intersecção de rectas com circunferências é resolvido exclusivamente à custa de equações e de sistemas de equações. Não há, na maior parte dos casos, a mínima intenção de fazer uma pequena figura geométrica, num canto da folha de papel, de modo a tirar proveito da visualização para uma boa resolução do problema. É a Geometria Analítica interpretada "apenas" como Analítica.

Os alunos têm uma grande preocupação em recorrer a fórmulas trigonométricas, que muitas vezes baralham, para relacionarem senos e cosenos, por exemplo. Na maioria das vezes o problema resolver-se-ia de forma prática e fiável através do simples trabalhar com o círculo trigonométrico, de construção rápida.

Outros exemplos poderiam ser relatados. De uma maneira geral, os alunos não fazem a ligação da visualização com o pensamento analítico. Este comportamento dos alunos reflecte o ensino que lhes é ministrado, onde há uma subvalorização bastante grande do raciocínio que faz uso essencialmente da informação visual (raciocínio visual). Este é considerado um raciocínio de segunda categoria servindo, quando serve, apenas como um auxiliar para a aprendizagem.

Mas terá o raciocínio visual pouco peso no raciocínio matemático?

Deverá este raciocínio continuar a ser considerado pouco digno e de nível inferior ao raciocínio algébrico?

Raciocínio Visual na Matemática

Freudenthal (1973) afirma que a omnipresença da linguagem geométrica na Matemática de hoje não se deve só à tradição histórica. Mesmo nos domínios que aparentemente nada têm a ver com a Geometria é a intuição geométrica que sugere o que é importante, interessante e acessível, precavendo contra o desvio no emaranhado imenso dos problemas, das ideias e dos métodos. Para este autor, a intuição geométrica não se reduz à visão geométrica do espaço físico. A interacção do formalismo com as intuições primárias "ingénuas", baseadas na nossa experiência espacial, conduz às chamadas intuições refinadas ou prolongadas, podendo-se dizer que, quando um matemático está a trabalhar com a intervenção de imagens e de esquemas recordando estruturas espaciais, é a intuição geométrica que está em acção — as imagens acompanham a criação matemática.

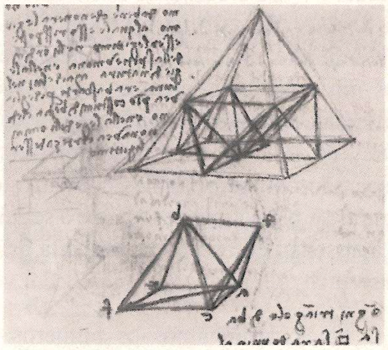

Fig.1 - Desenho de Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci, homem da ciência e da arte, foi um génio da representação visual. Os seus esboços faziam parte integrante das suas investigações geométricas e mecânicas. Neste desenho, Leonardo demonstra que "qualquer pirâmide de base quadrada será o dobro de uma pirâmide de base triangular".

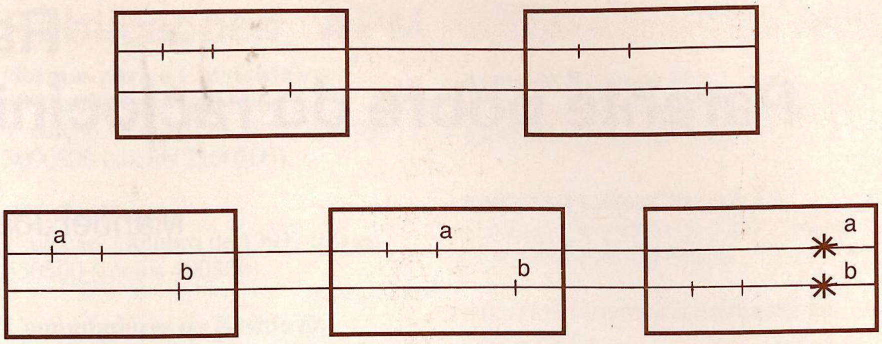

Fig. 2 - Diagrama de Van der Waerden usado na demonstração da conjectura de Baudet

Por seu lado, Hadamard (1945) afirma que os matemáticos, na sua actividade profissional, utilizam imagens e estas, muitas das vezes, são de natureza geométrica (embora existam diferenças individuais quanto à forma como o pensamento dos matemáticos confia nas imagens). Ainda segundo este autor, um matemático quando está a pensar evita, geralmente, utilizar palavras ou mesmo símbolos algébricos (ou outros) — ele utiliza imagens. Einstein, em carta dirigida a Hadamard (e por este referida), escreveu o seguinte:

> "As palavras e a linguagem escrita ou oral parecem não desempenhar nenhum papel no meu pensamento. Os construtores psicológicos, que são os elementos do pensamento, são certos sinais ou figuras, mais ou menos claros, que podem ser reproduzidos e combinados em liberdade".

Há, pois, indicadores que apontam para o facto de os matemáticos confiarem muito no raciocínio visual durante o seu trabalho, embora raramente explicitem a forma como chegam aos seus resultados.

Um dos poucos casos explicitados é o relatado por Van der Waerden que ilustra uma discussão com dois colegas seus através da qual eles encontraram uma demonstração para a conjectura de Baudet — "Se o conjunto dos números naturais fôr dividido em dois subconjuntos disjuntos, então pelo menos um deles contém uma progressão aritmética de razão L (com L arbitrário)" (Dreyfus, 1945, p. 36). O relatório desta discussão, com sete páginas, contém oito figuras. A primeira delas é a que a seguir se apresenta, que era acompanhada pela frase:

> "Nós desenhámos os números como pequenas barras transversais... as duas linhas horizontais supunha-se representarem os dois subconjuntos".

Porém, a publicação da demonstração desta conjectura foi feita em cinco páginas e não continha nenhum diagrama.

Certamente que qualquer outro matemático que queira entender a demonstração publicada terá de recriar os mesmos (ou outros parecidos) diagramas de Van der Waerden.

Os diagramas são essenciais para o pensamento matemático mas a sua utilização tem sido sistematicamente escondida pelos matemáticos. Porque o será? Porque é que os matemáticos escondem as suas visualizações e os argumentos baseados nelas?

Para Dreyfus (1991) isto nem sempre se passou e justifica a situação por duas razões:

1ª. As imagens podem não ter surgido aos matemáticos de forma suficientemente penetrante para serem descritas por palavras ou figuras (caso das figuras "mais ou menos claras" de que Einstein falou).

2ª. Os diagramas são considerados, provavelmente, inaceitáveis para a publicação matemática standard (caso dos diagramas de Van der Waerden).

Ainda segundo este autor, hoje em dia há uma corrente em crescimento que defende o raciocínio visual não só na descoberta mas também na descrição e justificação dos resultados matemáticos. Esta corrente tem sido impulsionada pela existência dos poderosos computadores gráficos. Dreyfus refere o trabalho desenvolvido por Devaney (1989) e o desenvolvido por Davis e Anderson (1979). O primeiro descreveu certos processos dinâmicos através de sequências de transformações no plano complexo, representando-as graficamente através de programas computacionais, que depois foram filmadas. Os resultados, segundo o autor, foram sempre matematicamente estimulantes e muitos resultados matemáticos novos foram demonstrados. O segundo trabalho deu ênfase ao poder do raciocínio visual quanto à descoberta de novos resultados em Matemática.

O que diz a Ciência Cognitiva?

A visão, ao produzir modelos mentais, leva a que o suporte visual apropriado tenha efeitos positivos na compreensão dos alunos e na resolução de problemas. As ilustrações, ao ajudarem os alunos a organizar a informação em modelos mentais com significado, contribuem para o sucesso da resolução de problemas. As relações espaciais entre as componentes de um problema são garantidas pelas representações esquemáticas. Nos diagramas, a informação é indexada pelas suas localizações, dando possibilidade de agrupar toda a informação acerca de um elemento simples e expressar espacialmente relações lógicas.

A forma como é gerado o significado na aprendizagem da Matemática tem sido uma preocupação para alguns investigadores, nomeadamente para Dorfler (1991). A base da sua teoria assenta na ideia de esquema de imagem que, para muitos dos conceitos matemáticos, compreenderá uma componente-figura complementada com componentes-operativas, relacionais e simbólicas. A componente-figura levará, muitas vezes, a uma representação visual do conceito em causa, enquanto que as componentes operativas associadas capacitarão o raciocínio visual com e acerca do conceito.

Para Dreyfus (1991), este trabalho teórico de Dorfler é compatível e está completamente de acordo com a descrição de Hadamard sobre os modelos do pensamento dos matemáticos.

Implicações para a Educação Matemática

O desprezo a que tem sido votado o raciocínio visual é fruto da pouca importância que lhe tem sido dada pelos professores e educadores de Matemática como reflexo natural do paradigma dominante na comunidade dos matemáticos.

O combate a esta situação passará pela formação dos professores e pela apresentação da Matemática através de uma forma mais visual. Várias experiências têm vindo a ser feitas neste sentido, denotando uma grande confiança nas potencialidades do raciocínio visual. Um dos exemplos apresentado por Dreyfus (1991) foi o realizado por Artigue (1989). A experiência consistiu no desenvolvimento e ensino de um nível curricular universitário, no qual foi usado um "software" computacional, para ajudar os alunos a desenvolver uma abordagem geométrica e qualitativa das propriedades das soluções das equações diferenciais. Este estudo foi baseado no raciocínio com funções não apresentadas explicitamente por uma fórmula, mas apenas através da informação sobre as suas derivadas. Um dos objectivos do currículo, declarado explicitamente, era conduzir os alunos a trabalhar com curvas sem o suporte de uma fórmula. Ou seja, inferir informação gráfica sobre as curvas a partir da informação gráfica das suas derivadas. Para que este objectivo se tornasse realista, foi feita uma ruptura completa com o tratamento usual das funções utilizado no ensino secundário (essencialmente algébrico). Algumas das fases do currículo foram trabalhar com noções básicas como a inclinação do campo, isóclinas, curvas solução e simetrias para produzir curvas num efeito dialéctico recíproco entre predicção e justificação; aprender sobre noções do mais alto nível, tais como ramificações e fluxos, incluindo o facto da variação do tipo de fluxo nas equações depender de parâmetros. Uma das conclusões da experiência foi que os alunos entraram no trabalho geométrico com relativa facilidade, devido ao facto da complexidade das suas tarefas ter sido reduzida pela possibili dade de utilização de "software" computacional apropriado.

Computadores e Raciocínio Visual

Mason (1991) afirma que cada vez mais os factos e conhecimentos matemáticos estarão baseados numa intuição profundamente desenvolvida a partir do uso de programas computacionais, onde todo um vasto conjunto de conhecimento matemático sofisticado terá como suporte o rato — a mão — o olho — o "écran" do monitor, cuja generalidade não é expressa por letras mas experimentada pela força muscular. Cada vez mais o "software" permite que o utilizador manipule objectos no "écran" envolvendo ideias matemáticas como objectos geométricos (gráficos e curvas), ícons referentes a objectos matemáticos como grupos, transformações e fórmulas que até então só poderiam ser utilizadas através da Matemática formal — desta forma a Matemática aproxima-se muito mais do utilizador. Os computadores tornam, assim, possível uma representação visual da Matemática (não oferecida por nenhuma outra nova tecnologia), permitindo, por uma acção visual directa e pela observação de mudanças subsequentes, o acesso aos objectos e relações matemáticas. Por outro lado, torna-se possível, também, investigar o que conduz a uma determinada mudança numa certa relação matemática. O resultado desta acção pode ser implementado de forma dinâmica,

"E as acções podem repetir-se em liberdade, com ou sem mudança de parâmetros e podem ser desenhadas conclusões com base nos 'feedback' dados pelo programa computacional. São estas possibilidades que dão o poder ao computador para a aprendizagem do raciocínio visual em Matemática" (Dreyfus, 1991, p. 45).

Conclusão

Esta potencialidade dos computadores para a Matemática visual, se bem que muito importante, não basta por si. É preciso desenvolver todo um trabalho de investigação que permita ir progredindo no conhecimento da reacção dos alunos face aos programas existentes.

Por outro lado, é fundamental que os professores e educadores de Matemática devolvam ao raciocínio visual um estatuto de acordo com a sua importância de modo que seja conseguido o equilíbrio desejado: o da integração dos pensamentos visual, verbal e algébrico.

Referências

Dorfler, W. (1991). Meaning: Image schemas and protocols. *Proceedings of the XV International Conference for PME.*

Dreyfus, T. (1991). On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education. *Proceedings of the XV International Conference for PME*, 1, p. 33-48.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: Reidel.

Hadamard, J. (1945). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Mason, J. (1991). Mathematical Problem Solving: Open, Closed and Exploraty in the UK. *ZDM*, 91/1, p. 14-19.

Manuel Saraiva
Universidade da Beira Interior