

O concurso de problemas do ProfMat 91

José Paulo Viana

Durante o último ProfMat no Porto, organizou-se um concurso de problemas. O problema proposto foi "A rede de estradas":

"Numa ilha existem três cidades, Aix, Box e Cix, ligadas duas a duas por uma rede de estradas.

Um motorista de táxi daquela ilha informou-me que havia 82 caminhos diferentes entre Aix e Box, incluindo os que passavam por Cix, e que havia 62 caminhos entre Box e Cix, incluindo os que passavam por Aix. Perguntei-lhe quantos existiam entre Aix e Cix e ele respondeu-me que não sabia mas tinha a certeza que, contando com os que passavam por Box, havia menos de 300.

Quantos caminhos diferentes há entre Aix e Cix, incluindo os que passam por Box?"

Dez minutos depois de aberto o concurso, chegava a primeira resposta!

Três colegas tinham aproveitado a viagem de comboio de Lisboa até ao Porto para resolver o "Desafio" publicado no Público, admitindo que, tal como no ano anterior, voltaria a haver um concurso baseado no problema saído nesse domingo.

Receberam-se 15 respostas individuais:

- Isabel Viana
 - Jaime Carvalho e Silva
 - José Manuel Duarte
 - José S. Fernandes
 - Manuel António Rodrigues
 - M^a Amélia Trigo Pereira
 - M^a Inez Santos
 - M^a José Santos
 - M^a Margarida Graça
 - Mário Gonçalves
 - Rosa Maria Ribeiro
- e duas respostas colectivas:

- Ana Maria Vieira, Isabel Calado e M^a Carmo Queiroz

- Manuela Azevedo, Manuela Gema e Rosário Madruga.

Chegou ainda uma resposta, impecavelmente resolvida e apresentada, só que não trazia nome. Não conseguimos saber quem tinha sido o seu autor.

Houve, além disto, um caso muito curioso. Um senhor entrou pelo Instituto dentro, dirigiu-se à mesa da recepção e perguntou: "É aqui que se está a realizar o encontro de professores de Matemática? Então quero entregar a minha resposta ao concurso de problemas". Deixou uma folha de papel e foi-se embora. Verificámos depois que ele é um economista mas não é professor de Matemática. Não chegámos a perceber como é que ele tinha sabido do encontro e do concurso mas, como a resposta estava certa, decidiu-se atribuir-lhe também um prémio...

O júri, constituído pelo Eduardo Veloso e pelo José Paulo Viana, ficou entretanto perante um outro problema. É que quase todas as respostas estavam certas e não havia prémios suficientes para todos. Como o método de resolução seguido pelos concorrentes foi praticamente o mesmo, o júri decidiu atribuir os prémios às resoluções mais claras, elegantes e sem passos desnecessários. Mesmo assim foi difícil! O problema proposto não era o mais aconselhável para este tipo de concurso.

As respostas escolhidas foram as de:

- Jaime Carvalho e Silva
- M^a Amélia Trigo Pereira
- Rosa Maria Ribeiro
- Manuela Azevedo, Manuela Gema e Rosário Madruga
- Carlos Correia de Matos (o nosso amigo economista...).

O prémio foi o livro "Desafios" com a recolha do primeiro ano de problemas propostos pelos elementos do júri no jornal "Público", enviado entretanto pelas Edições Afrontamento a todos os vencedores.

Finalmente, eis a resolução do problema.

Representemos por

x - os caminhos directos entre Aix e Box (sem passar por Cix)

y - os caminhos directos entre Box e Cix

z - os caminhos directos entre Aix e Cix.

Sabemos que $x + yz = 82$

$$y + xz = 62.$$

Subtraindo ordenadamente obtemos $(y - x).(z - 1) = 20$.

Estes dois factores, que multiplicados dão 20, são números inteiros e portanto só há seis casos possíveis: 20×1 , 10×2 , 5×4 , 4×5 , 2×10 e 1×20 .

Substituindo então, conjugadamente, os sucessivos valores de z (2, 3, 5, 6, 11, 21) e de y ($x+20$, $x+10$, $x+5$, $x+4$, $x+2$, $x+1$) na equação $y + xz = 62$, obtemos os seguintes valores:

z	2	3	5	6	11	21
x	14	13	NI	NI	5	NI
y	34	23	NI	NI	7	NI

em que representamos por NI os valores não inteiros e que, portanto, não servem para o problema.

O número de caminhos entre Aix e Cix é dado por $N = z + xy$, e virá então, para os vários casos,

z	2	3	11
N	478	302	46

Como o número de caminhos é inferior a 300, temos de rejeitar os dois primeiros casos. A solução é portanto 46.