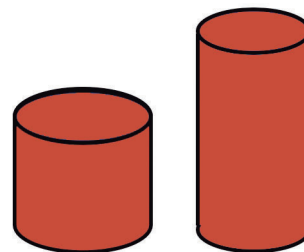


O maior cilindro

A Andreia tem uma placa retangular de chapa, com uma área de 600 cm^2 , que pretende usar para construir a parede lateral de um cilindro. Reparou que, se enrolar a chapa num sentido, obtém um cilindro com um volume 50% maior do que se enrolar no outro sentido.

- Quais são as dimensões da placa?
- Qual é o volume do maior cilindro que pode construir?

Respostas até 04 de junho, para zepaulo46@gmail.com



SOMANDO E SUBTRAINDO QUADRADOS

Foi este o problema proposto no número 165 da *Educação e Matemática*:

O Tó Zé pegou na calculadora e, partindo de zero, começou a fazer as operações seguintes.

Somou o quadrado de 1, subtraiu o quadrado de 2, somou o quadrado de 3, subtraiu o quadrado de 4, e assim sucessivamente. Ou seja, foi somando e subtraindo alternadamente os quadrados dos números naturais.

Só parou quando, finalmente, o resultado ultrapassou 2022.

- Qual foi o número cujo quadrado ele adicionou pela última vez?
- Qual foi o resultado que obteve?

Recebemos 17 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Ana Sofia Santos (Guimarães), André Bernardino (Castelo Branco), Andreia Cardoso, Carlos Dias (Silveira), Daniel Ferreira (Espinho), Delfim Guedes (V. N. Gaia), João Pintaroxo (Ponte da Barca), José Mendes da Silva (Guimarães), Mário Roque (Guimarães), Martim Gomes, Pedro Martins (Guimarães), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Rita Rodrigues (Guimarães), Susana Dias (Torres Novas) e do grupo Manuel Saraiva e Rogério Berrincha (Covilhã).

As abordagens dos nossos leitores foram variadas, como seria de esperar.

A menos elaborada, exigindo bastante trabalho com uma calculadora e alguma paciência, é ir determinando passo a passo a soma dos quadrados positivos e negativos. Foi o que fizeram a Ana Sofia e a Rita.

Houve quem usasse a folha de cálculo, colocando nas várias colunas os números naturais, os seus quadrados alternadamente positivos e negativos, e as sucessivas somas parciais da coluna anterior, procurando o primeiro valor superior a 2022. Este processo foi usado pela Alice e também, como segundo método para confirmar a solução, pelo Daniel e pelo Alberto.

A programação também esteve presente. O José em C++ (confirmando depois com calculadora) e o Daniel em Python, como terceiro processo.

Finalmente, a abordagem mais “popular” (11 leitores) implicou o uso de sucessões, embora por vias diferentes. Vejamos duas delas.

André Bernardino

A expressão que pode modelar o problema, é:

$$-0^2 + 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - \dots$$

Podemos [agrupando as parcelas duas a duas] olhar para a expressão da seguinte maneira:

$$1^2 - 0^2 = (1 - 0)(1 + 0) = 1 + 0$$

$$3^2 - 2^2 = (3 - 2)(3 + 2) = 3 + 2$$

$$5^2 - 4^2 = (5 - 4)(5 + 4) = 5 + 4$$

$$7^2 - 6^2 = (7 - 6)(7 + 6) = 7 + 6$$

...

Observamos que o valor da soma destas parcelas é igual à soma dos números naturais, ou seja,

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots$$

Sabendo que a soma dos n primeiros números naturais é dada pela expressão $\frac{n(n+1)}{2}$, chegamos à seguinte equação:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2022 \Leftrightarrow n^2 + n - 4044 = 0 \Leftrightarrow n \approx -64,094 \vee n \approx 63,094$$

[Assim, n tem de ser maior que 63,094] Como 64 é par, o seu quadrado é subtraído, obtendo-se um número negativo. Portanto, o último número cujo quadrado o Tó Zé adicionou foi o 65, para um total de 2145.

Manuel & Rogério

Começámos por ir adicionando os sucessivos termos consecutivos da sucessão dada

$$-0^2 + 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - \dots$$

Fazendo a sucessão das somas parciais, temos:

$$1, -3, 6, -10, 15, -21, 28, \dots$$

Constatámos que a sucessão das somas, ou eram números triangulares, ou os seus simétricos.

No nosso desafio a soma obtida, ou é um número triangular (se tivermos um número ímpar de parcelas), ou o simétrico de um número triangular (se tivermos um número par de parcelas).

Com esta certeza, basta-nos encontrar o primeiro número triangular superior a 2022, tendo sempre em conta que tal número terá de corresponder a um número ímpar de parcelas da nossa adição. Consultando uma tabela de números triangulares, vemos que o 64.º número triangular é 2080, primeiro número triangular superior a 2022, mas correspondente a um número par de parcelas (64), pelo que não nos interessa. O 65.º número triangular é 2145, primeiro número triangular superior a 2022 e que corresponde a um número ímpar de parcelas (65).

Resposta: O número cujo quadrado o Tó Zé adicionou pela última vez foi o 65. O resultado que obteve foi 2145.

Alberto Canelas propõe ainda um desafio adicional:

Se o Tó Zé só tivesse parado quando o resultado fosse inferior a -2022, qual seria a resposta às duas questões do problema?