

# Representações múltiplas no ensino e aprendizagem da matemática

NÉLIA AMADO

Para alguns leitores o tema das representações, em matemática, pode parecer trivial, uma vez que aprender matemática envolve a aprendizagem de representações. De facto, desde os primeiros anos de escolaridade que os alunos aprendem representações dos números e das operações e, ao longo do percurso escolar vão ampliando os seus conhecimentos de novos símbolos matemáticos, novos números e novas operações. Outros objetos matemáticos vão igualmente surgindo, nomeadamente, as funções e limites, a derivação ou a integração, entre muitos outros. Na verdade, os alunos estão a aprender representações simbólicas próprias da linguagem da matemática.

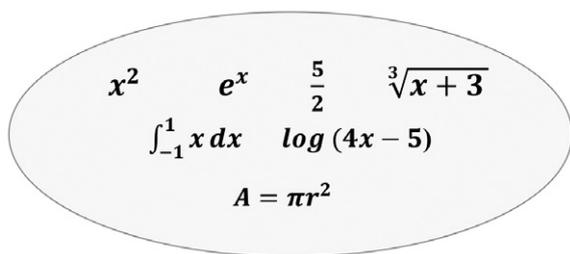
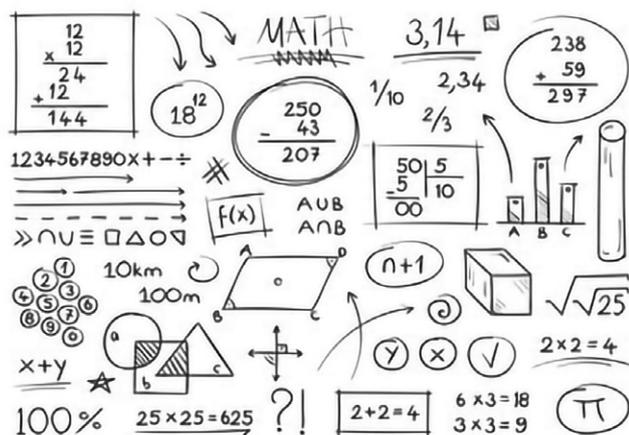


Figura 1. Exemplos de representações matemáticas

As representações matemáticas apresentadas na figura 1 traduzem ideias e conceitos matemáticos, alguns dos quais altamente sofisticados e abstratos. O conhecimento matemático é muito mais do que o conhecimento destas ideias e conteúdos em linguagem simbólica própria da matemática, implica ser capaz de as manipular, transformar e relacionar, mas acima

de tudo, envolve a compreensão e o significado destas ideias e a capacidade de as mobilizar na resolução de resolução de diferentes tipos de tarefas.

Muitas das ideias e dos conceitos matemáticos que representamos em linguagem matemática são complexos e abstratos. Um dos casos bem conhecidos de todos os professores de matemática é a dificuldade dos alunos em representar e manipular números racionais. Mesmo no ensino superior, é frequente encontrar alunos com dificuldades em manipular e transformar números racionais. Aliás, não tenho dúvidas em dizer que conhecem a sua representação, porque assim que se deparam com um número representado na forma de fração ficam nervosos e angustiados. Perguntam os leitores, como é possível? É possível, porque eu tenho alunos nesta situação nas minhas aulas. Pode haver inúmeras explicações para que tal aconteça, mas uma hipótese pode ser a falta de compreensão do conceito de fração que os impede de manipular e transformar as representações matemáticas. E isso fica muito claro quando têm de realizar operações com números fracionários, nos mais variados contextos, seja no estudo de matrizes ou na resolução de um problema de programação linear.

Situação contrária acontece com os alunos que reconhecem representações múltiplas dos números racionais e são hábeis na sua manipulação e transformação, estes facilmente conseguem resolver, com elevado grau de sucesso, problemas mais complexos.

Destaco a expressão que utilizei, *representações múltiplas* porque na verdade é aqui que está o cerne da questão. Esta é uma das razões que justificam a relevância que é atribuída às representações nos currículos de muitos países, incluindo, em Portugal. O recurso a representações múltiplas é determinante para a aprendizagem matemática, razão pela qual este tema faz parte da investigação em educação matemática há várias décadas.

Estas representações múltiplas de que falarei adiante podem também ser designadas de representações externas, em oposição às representações internas, estudadas na neurociência e que não irei aprofundar aqui. Apenas quero sublinhar que a construção das representações internas, está relacionada com possíveis configurações mentais, determinantes nos processos

de raciocínio, como é explicado pelo neurocientista António Damásio (2011). A construção destas configurações mentais só é possível se o aluno compreender e atribuir significado às ideias e aos conceitos estudados, mas para tal é necessário proporcionar aos alunos representações múltiplas, uma vez que o recurso exclusivo a representações matemáticas pode ser insuficiente dado o seu grau de abstração e complexidade.

### AS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICA NAS NOVAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

As novas Aprendizagens Essenciais de Matemática (AEM) (Canavarro et al., 2021) para o ensino básico, assim como as Aprendizagens Essenciais de matemática para o ensino secundário, que estiveram em discussão recentemente, apresentam novos desafios que prometem contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem da matemática e, conseqüentemente, para o sucesso dos nossos alunos ao longo da escolaridade obrigatória.

Começo por destacar as seis capacidades matemáticas transversais enunciadas nas novas AEM para o ensino básico e às quais têm sido dedicados números temáticos desta revista: resolução de problemas, o raciocínio matemático, o pensamento computacional, a comunicação matemática e representações matemáticas. Este número temático, dedicado à capacidade de usar múltiplas representações matemáticas, encerra assim este ciclo.

Esta capacidade é apresentada nas novas AEM como um dos objetivos para a aprendizagem da matemática:

Desenvolver a capacidade de usar representações múltiplas, como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática, e como possibilidade de apropriação da informação veiculada nos diversos meios de comunicação, nomeadamente digitais, onde surge em formatos em constante evolução. As ideias matemáticas são especialmente clarificadas pela conjugação de diferentes tipos de representação, e a compreensão plena depende da familiaridade e fluência que os alunos têm com as várias formas de representação. A tecnologia desempenha um papel especialmente relevante por facilitar a transição entre diferentes tipos de representação e análises com maior detalhe ou magnitude, inacessíveis sem os recursos tecnológicos. (AE, 2021, p. 3).

Mas do que falamos quando nos referimos a representações múltiplas em matemática?

### O QUE ENTENDEMOS POR MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS

Embora exista uma vasta literatura e inúmeros estudos em torno da temática das representações, Mainali (2021) apoiando-se em diversos autores define representações matemáticas, como um símbolo ou conjunto de símbolos, diagramas, objetos, imagens ou gráficos, que podem ser utilizados no processo de ensino

e aprendizagem. Esta definição é bastante mais ampla do que o conceito de simbologia matemática, anteriormente referida, pois inclui a possibilidade de considerar diagramas, tabelas, objetos, imagens e gráficos para apresentar uma ideia ou um conceito matemático.

No domínio da matemática são habitualmente reconhecidos quatro modos de representação: i) verbal, ii) gráfico, iii) algébrico e iv) numérico, que podem ser utilizados isoladamente ou em interação entre si, pois o estabelecimento de conexões entre estes modos é fundamental para uma melhor compreensão da matemática.

A mesma autora aponta algumas razões que justificam a importância da utilização de múltiplas representações, no ensino e aprendizagem da matemática, como, por exemplo:

- As representações são inerentes à própria natureza da matemática. De facto, existem tópicos matemáticos que estão fortemente associados a representações, alguns dos quais não podem ser estudados sem o recurso a diferentes representações. Um exemplo, são os conceitos de função e de gráficos cartesianos que não só estão associados a várias representações, mas também ao estabelecimento de conexões entre elas.

Na figura 2, apresentam-se três representações distintas: numérica, algébrica e gráfica cujas conexões permitem aos alunos, em simultâneo, a aprendizagem de funções e gráficos, atribuindo significado ao que se entende por calcular, por exemplo,  $f(3)$ .

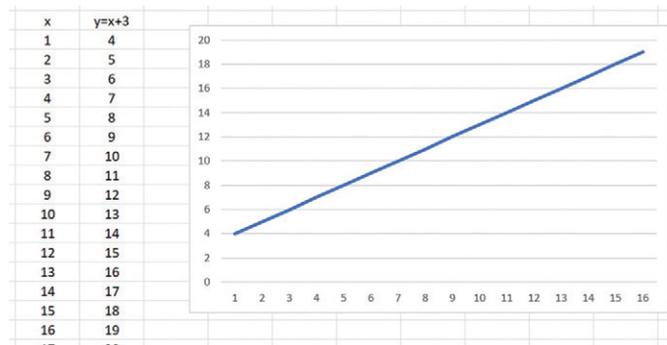


Figura 2. Representação gráfica, numérica e algébrica

- As representações permitem múltiplas concretizações de um conceito, isto é, podemos usar diferentes representações para um mesmo conceito matemático ou estrutura matemática. A utilização de múltiplas representações de um mesmo conceito permite aos alunos extrair e apreender determinadas propriedades do conceito. Por exemplo, o recurso a diferentes representações de frações permite aos alunos uma melhor compreensão do conceito e, em simultâneo, tirar conclusões sobre a equivalência de frações.

Referi inicialmente, as dificuldades dos alunos em manipular números racionais, na verdade, o número pode não ser facilmente entendido por todos os alunos, mas se recorremos a

um aplicativo (figura 3) facilmente conseguimos proporcionar ao aluno diferentes representações deste número racional.

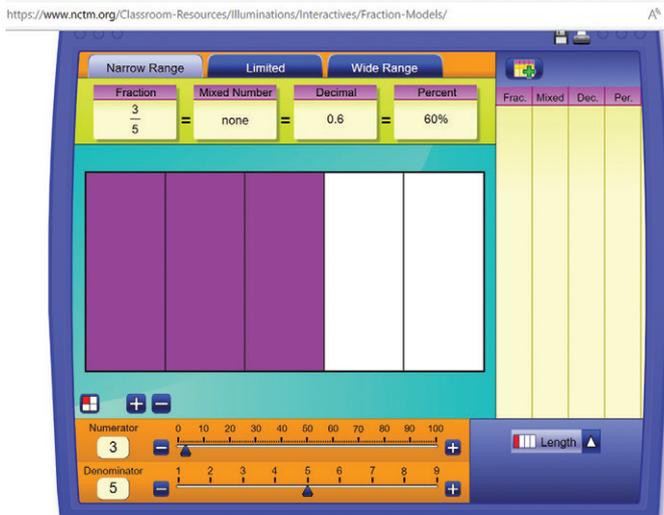


Figura 3. Fraction Models - Aplicação interativa do NCTM

- As representações podem e devem ser usadas para mitigar as dificuldades dos alunos. Na resolução de um problema ou na compreensão de um conceito o professor deve recorrer a várias representações de modo a facilitar a compreensão da situação. No exemplo da figura 3, o recurso a representações múltiplas, oferece ao aluno vários olhares sobre o mesmo objeto. Ao estabelecer conexões entre elas, poderá mais facilmente compreender não só o conceito de fração, mas as representações múltiplas do mesmo número.
- As representações permitem ainda tornar a matemática mais atraente e interessante. Por exemplo, atualmente os manuais escolares revelam um progresso significativo relativamente à utilização de múltiplas representações. Se compararmos os manuais escolares do início deste século com os atuais, facilmente reconhecemos o recurso a uma diversidade de representações em oposição ao uso, quase exclusivo, de representações simbólicas próprias da linguagem matemática.

Vários autores (p. e. Ballard, 2000) defendem que os alunos devem, desde os primeiros anos de escolaridade, contactar com representações múltiplas e estabelecer conexões entre elas. Deste modo, é necessário que os alunos, desde os primeiros anos, sejam envolvidos na construção e interpretação de diferentes modos de representação. Este envolvimento tem dois propósitos, por um lado, a utilização de diferentes representações permite uma melhor compreensão da matemática e, por outro, as representações múltiplas permitem aos alunos múltiplas formas de comunicar as ideias matemática e o raciocínio na resolução de problemas.

Também Tripathi (2008) destaca a importância da utilização de múltiplas representações ao considerar que diferentes representações permitem olhar para um conceito através de uma variedade de lentes, onde cada lente proporciona uma

perspetiva diferente que torna a imagem (conceito) mais rica e mais profunda, possibilitando a cada um dos alunos uma compreensão do mesmo.

Em suma, para além da importância das múltiplas representações na compreensão de conceitos e ideias matemáticas, na resolução de problemas, no raciocínio matemático e na comunicação, é também reconhecida a sua importância no desenvolvimento de aspetos afetivos tais como a motivação e o gosto dos alunos para a aprendizagem da matemática.

### AS TECNOLOGIAS COMO FACILITADORAS DE MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS

O surgimento das tecnologias veio trazer um grande impulso à utilização de representações múltiplas. De facto, as tecnologias permitem construir representações que podem ser manipuladas tornando assim, as representações dinâmicas. O recurso à utilização da tecnologia permite que os alunos desenvolvam a compreensão de conceitos matemáticos, estabelecendo conexões entre diferentes ideias matemáticas ou entre múltiplas representações. Os ambientes tecnológicos dinâmicos possibilitam o desenvolvimento da compreensão de determinados conceitos através de conjeturas e da prova. Os alunos podem raciocinar e verificar as suas conjeturas observando os efeitos das suas interações com as representações em termos do que muda e do que não muda. Para além das calculadoras gráficas, o GeoGebra, pelo seu carácter dinâmico, possibilita representações dinâmicas e o estabelecimento de conexões entre diferentes tipos de representações, o que pode contribuir para uma melhor compreensão de diversos temas matemáticos. Ao combinar numa mesma imagem uma representação numérica, gráfica e algébrica, permite ao aluno estabelecer rapidamente conexões entre elas, facilitando assim um conhecimento mais sólido do tópico em estudo. Para além do GeoGebra ou da calculadora gráfica, temos ao dispor inúmeros aplicativos que facilitam a realização de experiências e promovem a obtenção de representações múltiplas, como o Fraction Models (nctm.org), já referido na figura 3, ou os manipuláveis virtuais construídos no próprio GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/rps4kf84>), como o da figura 4.

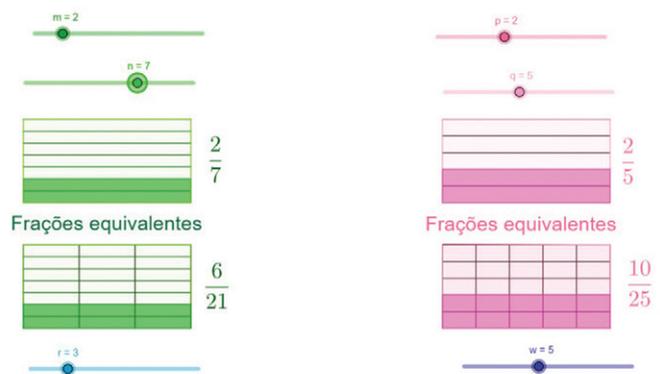


Figura 4. Representações de frações equivalentes num manipulável virtual do GeoGebra

Existe atualmente um grande número de aplicativos que permitem aos alunos não só manipular as representações, mas também explorar, investigar e conjecturar. Este trabalho pode ser feito, dentro ou fora da sala de aula, de acordo com o conhecimento que o professor tem dos seus alunos e do contexto. A utilização da folha de cálculo, como o Excel é outra ferramenta que facilita o recurso a representações múltiplas: numérica, gráfica ou algébrica.

Há evidências consideráveis de que o conhecimento representacional medeia a resolução de problemas complexos, promove a transferência de conhecimento para novas situações, bem como uma melhor compreensão dos conceitos.

### O PAPEL DO PROFESSOR NA UTILIZAÇÃO DE REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS

Ge (2012) defende que o uso de múltiplas representações deve ser organizado de forma a produzir o efeito desejado, promover as aprendizagens dos alunos. Para este autor é necessário cuidar da forma como as representações são apresentadas aos alunos e não as deixar ao acaso. O professor ao planificar as suas aulas deve ter em conta quais as representações mais adequadas para alcançar os objetivos a que se propõe, pois, cada tipo de representação tem as suas vantagens e desvantagens. É necessário que os alunos tenham conhecimento de quais as representações mais adequadas em cada tarefa.

Na resolução de problemas que envolvem a probabilidade condicionada, os professores recorrem, predominantemente, a representações na forma de tabelas. No entanto, existem problemas para os quais pode ser mais eficaz recorrer à representação na forma de um diagrama de árvore. Deste modo é importante que os professores na sua planificação incluam problemas que exigem os dois tipos de representação para chegar às representações simbólicas e resolverem os problemas com sucesso. Se os alunos recorrem sempre a tabelas (figura 5) nas suas aulas, então é pouco provável que utilizem um diagrama de árvore (figura 6), até porque desconhecem esta representação.

	$S$	$\bar{S}$	
$R$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{4}$
$\bar{R}$	$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$		1

Figura 5. Representação através de uma tabela

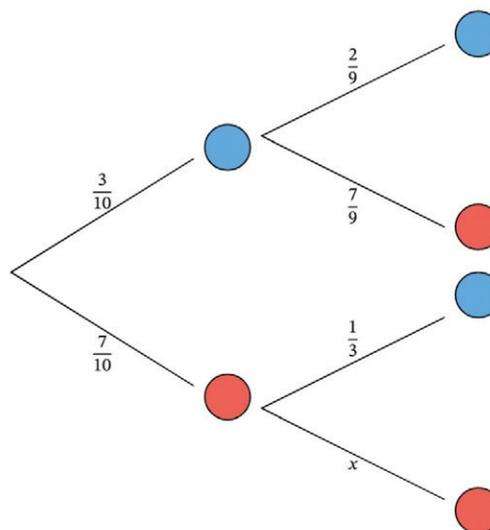


Figura 6. Representação através de um diagrama de árvore

### AS REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS NA AVALIAÇÃO FORMATIVA

As novas AEM para o ensino básico destacam a importância da avaliação formativa, referindo que esta prática “continuada contribui de forma muito expressiva para as aprendizagens dos alunos, pelo que é imperioso o seu desenvolvimento na aula de Matemática” (p. 7).

A avaliação formativa é um processo que envolve a recolha de informação sobre as aprendizagens dos alunos com vista à tomada de decisões sobre o ensino, ou seja, é um processo que informa sobre os níveis de compreensão. A avaliação formativa deve envolver uma diversidade de métodos de recolha de informação de modo a permitir ao professor aceder ao pensamento do aluno. Neste contexto, as representações produzidas pelos alunos permitem ao professor aceder à forma como estes pensam e raciocinam ao longo da resolução de um problema, permitindo-lhe dar feedback ao aluno, no sentido de o ajudar a regular a sua aprendizagem.

Heritage e Niemi (2006) tal como Duval (1999) ou Greeno e Hall (1997) defendem o valor das representações no processo de ensino e aprendizagem da matemática, não só pela natureza da própria matemática, mas também pelo poder que estas assumem na comunicação de ideias e conceitos, por esta razão consideram que o seu papel na avaliação formativa deve ser igualmente reconhecido. Para Heritage e Niemi (2006) as representações são uma poderosa ferramenta para os professores acederem ao pensamento do aluno, sejam eles símbolos, diagramas, mapas, imagens ou a própria linguagem oral ou escrita.

Os professores devem usar representações para envolver os alunos na aprendizagem da matemática, de modo que os alunos possam usar essas representações para estruturar a compreensão de conceitos emergentes. As representações devem ser um meio através do qual os alunos demonstram se e como entendem as ideias que foram introduzidas. Com base nas representações

produzidas pelos alunos, os professores farão mais inferências sobre a aprendizagem e decidirão como planificar as aulas seguintes. Além disso, durante a aula, as interações entre professor e alunos, ancoradas nas representações, constituem uma oportunidade para aprimorar, corrigir e elaborar conceitos matemáticos. Deste modo, é possível afirmar que sem o recurso a representações múltiplas de ideias matemáticas não é possível envolver os alunos no processo de ensino e aprendizagem.

Um ensino eficaz requer que os professores façam uso efetivo das representações para comunicar ideias, mas também que interpretem e respondam apropriadamente às representações produzidas pelos seus alunos.

Só assim, os alunos podem usar essas representações para estruturar a sua compreensão de conceitos e ideias. Finalmente, essas representações tornam-se um meio indispensável através do qual os alunos demonstram se e como entendem as ideias que foram trabalhadas. Com base nas representações produzidas pelos alunos, os professores podem fazer mais inferências sobre a aprendizagem do aluno e tomar decisões mais sustentadas para promover as aprendizagens. Além disso, o professor pode, a partir das representações produzidas pelo aluno, promover um diálogo que contribua para a clarificação do conceito matemático ou para o aluno prosseguir na resolução de determinada tarefa. Sem o recurso às representações, muitas vezes abstratas, não está claro como os professores podem ensinar e os alunos aprender.

Por conseguinte, não basta que os professores façam uma utilização efetiva de múltiplas representações para comunicar ideias e conceitos matemáticos com os seus alunos e que desenvolvam nos seus alunos a capacidade de mobilizar essas diversas representações na resolução das tarefas em sala de aula. É igualmente necessário que os professores interpretem as representações produzidas pelos alunos e os questionem sobre elas, como forma de promover a aprendizagem. Na figura 7, apresento o modelo proposto por Heritage e Niemi (2006), desenvolvido em cinco etapas, ligadas entre si num processo cíclico, que traduz o uso de representações no processo de ensino e aprendizagem, por professores e alunos.



**Figura 7.** Modelo de ensino e aprendizagem envolvendo representações

## PARA TERMINAR

Neste artigo procurei discutir a importância do uso de múltiplas representações no processo de ensino e aprendizagem da matemática e a sua relevância na avaliação formativa. As representações são ferramentas indispensáveis para os alunos aprenderem e compreenderem a matemática, mas também para os alunos comunicarem as suas ideias e aprendizagens. O professor deve pensar e planificar as sequências de representações tendo em vista os objetivos que pretende alcançar. Promover o uso de representações múltiplas é contribuir para uma aprendizagem da matemática que vai além da manipulação e transformação das representações matemáticas, é contribuir para que os alunos compreendam e atribuam sentido às ideias e aos conceitos matemáticos.

## Referências

- Ballard, J. (2000). *Students use of multiple representations in mathematical problem solving*. (Tese de doutoramento). Montana State University, Montana, USA
- Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME DGE. <https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica>
- Damásio, A. (2011). *O erro de Descartes: emoção, razão e cérebro humano*. Lisboa: Temas e Debates.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–26).
- Ge, L. (2012). Sequences of multiple representations in mathematical education. *Journal of Applied Global Research*, 5(14), pp. 10-18
- Greeno, J., & Hall, R. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, 78, 361–367
- Heritage, M., & Niemi, D. (2006). Toward a framework for using student mathematical representations as formative assessments. *Educational Assessment*, 11(3 & 4), 265–282. doi:10.1080/10627197.2006.9652992
- Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, 9(1), 1-21. <https://doi.org/10.46328/ijemst.1111>
- Tripathi, P. N. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438–445. <http://www.jstor.org/stable/41182592>.

**NÉLIA AMADO**

UNIVERSIDADE DO ALGARVE E UIDEF, INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA