

Somando e subtraindo quadrados

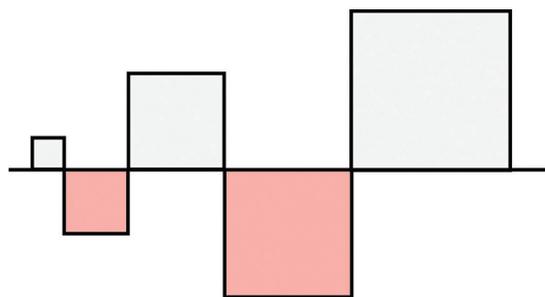
O Tó Zé pegou na calculadora e, partindo de zero, começou a fazer as operações seguintes.

Somou o quadrado de 1, subtraiu o quadrado de 2, somou o quadrado de 3, subtraiu o quadrado de 4, e assim sucessivamente. Ou seja, foi somando e subtraindo alternadamente os quadrados dos números naturais.

Só parou quando, finalmente, o resultado ultrapassou 2022.

Qual foi o número cujo quadrado ele adicionou pela última vez?

Qual foi o resultado que obteve?



Respostas até 31 de dezembro, para zepaulo46@gmail.com

A POSIÇÃO DO ANO DA RAQUEL

Foi este o problema proposto no número 163 da *Educação e Matemática*:

Os números naturais foram colocados numa tabela triangular, tal como se vê na figura.

				1					
			2	3	4				
		5	6	7	8	9			
	10	11	12	13	14	15	16		
17	18	19	20	...					

Cada linha é designada pelo número que está mais à sua esquerda, enquanto a designação de cada coluna é o primeiro número a partir de cima.

A posição de um número nesta tabela é constituída pela indicação da sua linha e da sua coluna. Por exemplo, a posição do número 20 é (17, 2).

A Raquel nasceu em 1978 e gostava de saber onde está esse número.

Qual é a posição do ano da Raquel?

Recebemos 18 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Aluisio Santos (São Paulo, Brasil), André Perez (São Paulo, Brasil), Carlos Dias (Silveira), Carolina Teixeira (Guimarães), Daniel Ferreira (Espinho), Eduardo Veloso (Cascais), Isabel Viana (Porto), José Carlos Pereira, José Filipe (Castelo Branco), Letícia Martins (Guimarães), Luciana Brito, Mário Roque (Guimarães), Miguel Castro (Póvoa de Santa Iria), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Vítor Pereira e do grupo Manuel Saraiva e Rogério Berrincha (Covilhã)

A estratégia mais “popular” foi, sem dúvida, a de procurar padrões na organização dos números. Como diz o Eduardo, a tabela triangular tem muitas regularidades importantes. Vou usar a seguinte: os últimos números de cada linha são a sucessão dos quadrados dos números inteiros. Então, se 1978 fosse um

quadrado perfeito, a resposta seria imediata. Felizmente há calculadoras em todos os lados e a raiz quadrada de 1978 é 44,47.

Manuel & Rogério: Há que procurar a linha a que pertence o número 1978. Assim, há que enquadrar este número entre os dois quadrados perfeitos que o limitam.

$$44^2 < 1978 < 45^2 \quad \text{ou} \quad 1936 < 1978 < 2025$$

Concluimos, assim, que 1978 está na linha 45, onde o número mais à direita é 2025 e o mais à esquerda é 1937 (1936+1).

Está encontrada a “abscissa” do ano da Raquel: 1937.

Alberto: Para encontrarmos a designação da coluna vamos calcular o valor do ponto médio desta linha, o qual é média aritmética das extremidades, isto é, $(2025+1937)/2 = 1981$. 1981 está na coluna central (designada por 1) e 1978 está na terceira coluna à esquerda da coluna central (designada por 10). Está encontrada a designação da coluna, ou seja, 10.

Conclusão, a posição de 1978 é (1937, 10).

Houve quem seguisse caminhos um pouco diferentes, procurando outras regularidades da tabela. Por exemplo, deduzindo e usando o termo geral da sucessão de números que ocupam a coluna central. Nesta ótica, Pedrosa resolveu mesmo o problema por três processos distintos.

Houve até quem não se preocupasse nada com estas coisas e construísse simplesmente em Excel a tabela de números até chegar à linha que inclui o 1978... Mas o duo Manuel & Rogério faz notar que *tal resolução não nos daria muito gozo!*

Como já é seu hábito, o Daniel, depois de encontrar analiticamente a solução, elaborou um programa em Python de forma a verificar o resultado obtido.

O Mário e o Alberto construíram mesmo um algoritmo com os passos a dar para se encontrar a posição de qualquer número na tabela.

O Carlos deu mais um passo e fez um programa em Excel. Introduz-se um número qualquer e aparece-nos logo a posição (linha e coluna) em que ele está.