A posição do ano da Raquel

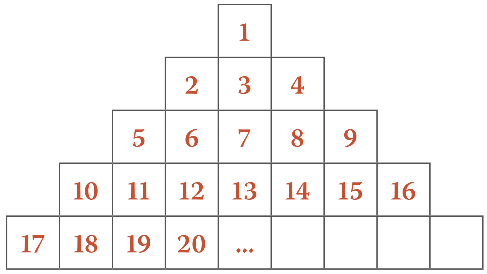
Os números naturais foram colocados numa tabela triangular, tal como se vê na figura.

Cada linha é designada pelo número que está mais à sua esquerda, enquanto a designação de cada coluna é o primeiro número a partir de cima.

A posição de um número nesta tabela é constituída pela indicação da sua linha e da sua coluna. Por exemplo, a posição do número 20 é (17, 2).

A Raquel nasceu em 1978 e gostava de saber onde está esse número.

Qual é a posição do ano da Raquel?



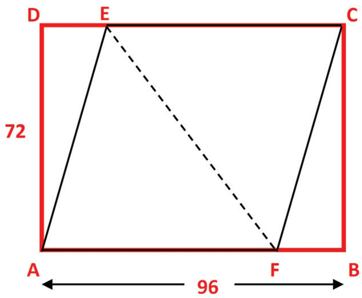
Respostas até 05 de junho, para ***zepaulo46@gmail.com***

UM LOSANGO NO RETÂNGULO

Foi este o problema proposto no número 161 da Educação e Matemática:

Os lados do retângulo ABCD medem 72 e 96 mm. O polígono AFCE é um losango.

Qual é a medida da diagonal EF do losango?



Recebemos 21 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), António Ricardo, Carla Faria (Guimarães), Carlos Dias (Silveira), Catarina Ferreira (Viseu), Conceição Ferreira (Celorico da Beira), Daniel Ferreira (Espinho), Edgar Martins (Queluz), Eduardo Oliveira (Guimarães), Francisca Cardoso (Guimarães), Isabel Viana (Porto), João Pintarroxo (Ponte da Barca), Joaquim Pinto, Letícia Martins (Guimarães), Lúcia Pinto (Guimarães), Mário Roque (Guimarães), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Susana Dias (Torres Novas), do grupo Manuel Saraiva e Rogério Berrincha (Covilhã) e do grupo Tatiana Matos, Bruno Oliveira, Nuno Cunha, Pedro Gonçalves, Tiago Nobre, Susana Marques, Marta Anastácio, Afonso Bonito, Hermínio Bastos (Torres Novas).

Um dos aspetos mais interessantes do problema é ter diversificados métodos de resolução e isso foi notado por vários leitores.

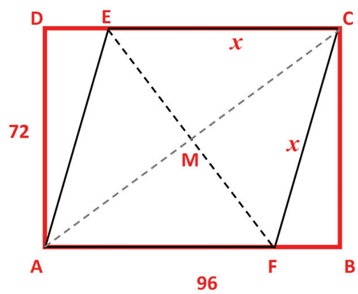
Edgar: *Como já não participo há algum tempo, vou participar duas vezes.*

Manuel & Rogério: *Hoje enviamos três resoluções distintas para o desafio colocado. Sabemos que não se pretende uma coleção de resoluções, mas sim uma resolução, claro. Porém, hoje parece-nos importante explicitar as três resoluções, devido ao seu aparecimento enquanto pensávamos na resolução do desafio.*

Daniel: *Apesar destes 3 processos que apresento e outro que sugiro, é possível que haja uma resolução ainda mais elegante que não me esteja a ocorrer. Não apresentando grande qualidade, compenso com a quantidade…*

Vejamos então algumas possíveis abordagens, por ordem de "popularidade".

1º Processo (Teorema de Pitágoras I)



Tracemos a diagonal [AC] .

Seja x a medida do lado do losango.

$\overline{CE} = \overline{CF} = \overline{AE} = \overline{AF} = x$ e $\overline{FB} = 96 - x$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao ΔCFB vem

$\overline{CF}^2 = \overline{FB}^2 + \overline{CB}^2$ $\quad x^2=(96-x)^2+72^2 \quad x=75$

Considerando o ΔABC vem

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 \quad \overline{AC}^2 = 96^2 + 72^2 \quad \overline{AC} = 120$

As diagonais do losango são perpendiculares entre si e bissetam-se. Seja M o seu ponto de interseção.

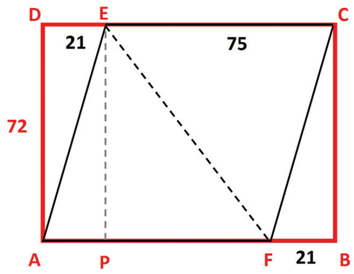
Considerando o ΔMEC vem

$\overline{EC}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MC}^2 \quad 75^2 = \overline{EM}^2 + 60^2 \quad \overline{EM} = 45$

Logo, $\overline{EF} = 2 \times 45 = 90$.

A diagonal [EF] do losango mede 90 mm.

2º Processo (Teorema de Pitágoras II)



Tal como no 1.º processo, deduzimos que $\overline{CE} = 75$ e portanto $\overline{DE} = 21$.

Seja P a projeção ortogonal de E sobre $\overline{AB}$. Logo, $\overline{PF} = 96 - 2 \times 21 = 54$.

Considerando o ΔPEF vem

$\overline{EF}^2 = \overline{EP}^2 + \overline{PF}^2 \quad \overline{EF}^2 = 72^2 + 54^2 \quad \overline{EF} = 90$

3º Processo (Área do losango)

Começamos, como no 2.º processo, por determinar $\overline{AC} = 120$.

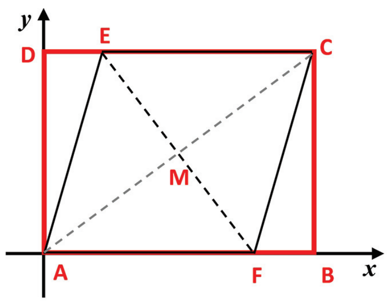
Podemos calcular a área do losango de duas maneiras: 1) como paralelogramo, 2) usando os comprimentos das diagonais D e d.

1) *Área=base×altura*=75×72=5400

2) $\text{Área} = \frac{1}{2} \times D \times d = \frac{1}{2} \times 120 \times \overline{EF} = 60\overline{EF}$

Igualando os dois valores, vem $60\overline{EF} = 5400 \quad \overline{EF} = 90$

4º Processo (Geometria Analítica)



Consideremos o retângulo no 1.º quadrante de um referencial de origem em A.

As coordenadas de C são (96,72).

As coordenadas de M, ponto médio do segmento de reta [AC], são (48,36).

O declive da reta AC é $m = \frac{72}{96} = \frac{3}{4}$.

Como as diagonais do losango se bissetam e são perpendiculares entre si, o declive da reta EF é $m' = -\frac{4}{3}$.

Como o ponto M pertence à reta EF, a equação da reta é $36 - y = -\frac{4}{3}(x - 48)$ ou $y = -\frac{4}{3}x + 100$.

Os pontos E e F pertencem a esta reta.

Ponto $E(x,72)$, logo $72 = -\frac{4}{3}x + 100$ $\quad x=21$ e portanto $E(21,72)$.

Ponto $F(x,0)$, logo $0 = -\frac{4}{3}x + 100$ $\quad$ x=75 e portanto $E(75,0)$.

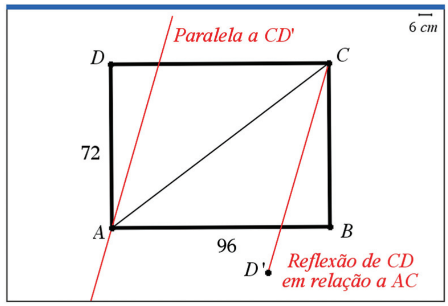
5º Processo (Trigonometria)

Não o vamos ver em pormenor. Podemos determinar a medida do ângulo *BAC*, do seu complementar *EFA* (porque as retas *AC* e *EF* são perpendiculares) e depois usar alguns dos resultados anteriores.

Ao contrário do que é habitual, apenas um leitor usou um programa de geometria dinâmica. O Joaquim fê-lo de forma entusiasta, enviando sucessivas resoluções, cada vez mais simples. Vejamos duas possibilidades baseadas no seu trabalho.

6º Processo (Geometria dinâmica I)

A diagonal [*AC*] é um eixo de simetria do losango. Faz-se a reflexão de [*CD*] em relação a esse eixo, obtendo-se [CD']. A interseção deste segmento com o lado [*AB*] define o ponto *F*.

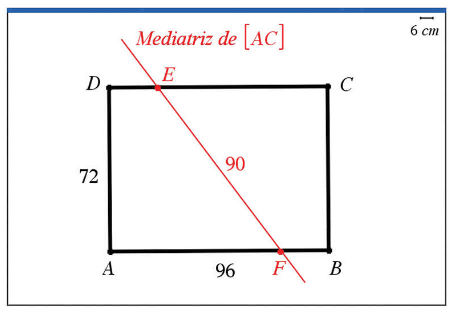


Por A traça-se uma paralela a [*CD'*], que interseta [*CD*] no ponto procurado *E*.
Basta agora pedir a distância entre *E* e *F*.

7º Processo (Geometria dinâmica II)

Este é o mais simples de todos os processos. Depois de desenhado o retângulo com as medidas dadas, basta um único comando para se obter os pontos *E* e *F*.

Como estes pontos são equidistantes de *A* e *C*, pede-se a mediatriz de [*AC*], que interseta o retângulo nos pontos procurados.



Depois, é só pedir a distância entre eles.

A diagonal [*EF*] do losango mede 90 mm.