

Permanências

O problema deste número. Mais de 30 anos a dar problemas

Atribuem a Cauchy a frase “o que farei no céu, durante toda a eternidade, se não tiver uma infinidade de problemas de matemática para resolver?” Pois agradeço ao José Paulo Viana este prazer enorme que nos proporciona, Deus lhe pague! É deste modo que Luciana Brito, na resposta ao questionário online, se refere a “O Problema deste número”, a secção da EM que José Paulo Viana dinamiza há cerca de 33 anos.

Celebrar 33 anos de vida na secção mais antiga da EM é também contar a sua história. Uma história feita de estórias, que aqui trazemos nas palavras de Zé Paulo, dos “cinco mais”, os cinco leitores que mais resoluções enviaram ao longo dos anos: Alberto Canelas, Pedrosa Santos, Graça Braga da Cruz, Alice Martins e Mário Roque e dos que aceitaram partilhar connosco o seu sentir, através do questionário online, mas também o testemunho de três alunos de Zé Paulo na E. S. Vergílio Ferreira há 20 anos, Filipe Boucinha, Luís Pereira e Tiago Cordeiro, que nos chegam numa inesperada sincronicidade.

A equipa editorial da EeM

ESTÓRIAS DA HISTÓRIA DESTA SECÇÃO

O início desta história remete-nos para 1988, como nos conta José Paulo Viana:

Tudo começou graças ao Eduardo Veloso, que desde sempre gostou de problemas e defendia que eles deviam ter um papel essencial no ensino da matemática. Resolveu por isso começar a propor, logo no n.º 8 da Educação e Matemática, um problema aos leitores. Para vincar bem a sua importância, o enunciado foi capa da revista. Fui uma das pessoas que respondeu e, como se aperceberam que eu gostava destas coisas, convidaram-me para a redacção da EM e para dinamizar a ainda embrionária secção. No início, apenas se publicava a resposta enviada por um dos leitores. No entanto, apareciam muitas vezes abordagens bastante diferentes e era uma pena que os leitores não tivessem conhecimento disso. Por isso, rapidamente uma das principais “riquezas” da secção passou a ser mostrar estratégias diferentes, inesperadas e até brilhantes de se chegar à solução.

Inicialmente, as propostas eram dirigidas aos professores enquanto possíveis entusiastas da resolução de problemas, mas, passado algum tempo e com base na reacção de alguns leitores, percebemos que seria ainda mais útil e interessante se os problemas pudessem ser usados nas aulas. E foi isso que se tentou fazer a partir daí.

Muitas vezes as estórias da história cruzam-se e o início desta é também recordado por Mário Roque:

Na revista número 8, na capa, vinha o (excelente) problema do remador no Tejo. Nesse longínquo ano de 1988 (!), a revista apanhou-me em pleno ano de estágio. Falamos dele entre nós, estagiários. Eu não o consegui resolver. O meu colega de estágio, Mário Gonçalves, chegou numa segunda-feira à Escola com a solução. Mas “irritado”, por isso lhe ter “estragado o Domingo!” E foi assim mesmo que saíram as suas palavras, na revista nº 9... Mas a resposta publicada não foi a dele. Começava assim: “Gosto muito de problemas”. O autor era um professor da E.S. Marquês de Pombal, de seu nome... José Paulo Viana!

NÚMEROS DA SECÇÃO

Numa secção com forte interação com os leitores, os números têm peso. Apurámos alguns e perguntámos a Zé Paulo o que lhe dizem 33 anos a dar problemas; 402 pessoas que responderam pelo menos uma vez e 6 pessoas que responderam mais de 30 vezes.

Diz-nos José Paulo Viana:

Os 33 anos foram um prazer e a oportunidade de conhecer gente interessante e de aprender abordagens e estratégias que desconhecia. As 402 pessoas foram uma surpresa, não me tinha apercebido que pudessem ser tantas. E deve ainda haver mais gente que resolve os problemas, mas que, com certa pena minha, não

nos envia o que fizeram. As 5 “mais” conheço-as bem, depois de tantos contactos. Com quase todas já tive oportunidade de debater resoluções com mais profundidade. Várias vezes me propuseram aditamentos ou prolongamentos às propostas da secção. São minhas amigas.

As respostas ao questionário mostram-nos que há leitores que resolvem os problemas, mas que nunca enviam por comodismo ou porque não ficam satisfeitos com a resolução. Esta última razão parece ser partilhada por muitos, como Alberto Canelas, que embora resolva na maior parte das vezes, desabafa “*houve alguns em que a minha resposta não me satisfaz totalmente e resolvi não enviar*”. As razões apontadas pelos “cinco mais” serão inspiradoras para que outros enviem as suas resoluções. “*Já há bastante tempo que envio sempre que resolvo. Já houve alturas em que não enviava, ainda que resolvendo. Mas apercebi-me que, se não fizer questão de enviar, não o exploro devidamente e/ou desisto mais facilmente...*” diz-nos Mário Roque. Também Graça Braga da Cruz, lembrando os Desafios do Público, comenta “*comecei a resolver os problemas da secção algum tempo antes de ter decidido começar a enviar a resolução ao Zé Paulo. Também procurava resolver os Desafios do Público, aos domingos*”. Alice Martins, que envia sempre que consegue resolver, afirma “*uma certeza, eu tenho: a minha dedicação tem-me facultado mais destreza na resolução de problemas e fico com vontade de fazer sempre mais. Se no meu caminho ainda conseguir motivar outras pessoas, então vale mesmo a pena continuar!*”

O GOSTO POR RESOLVER PROBLEMAS

A que se deve esta persistência em propor e resolver problemas, ao longo de tantos anos, foi o que tentámos perceber junto do editor da secção e dos leitores que mais respostas enviaram.

Aquele primeiro impacto com um bom problema põe-nos logo despertos e com a cabeça a funcionar (e isso sabe bem...). Segue-se o prazer da procura: Que posso fazer? Por onde posso ir? Já vi alguma coisa parecida? Depois, sentimos que vamos avançando, mesmo quando é preciso voltar atrás para testar novos caminhos. Por fim, há aquela alegria de se chegar ao fim, de se ter ultrapassado obstáculos, de se ter ficado mais rico. E o processo não acaba aqui. É frequente um problema resolvido ser o ponto de partida para um novo problema e para novo processo de procura.

Revela José Paulo Viana.

Um sentimento semelhante exprime Pedrosa Santos:

É o desafio em si mesmo ao qual é difícil ignorar - é o que sinto - de alguma maneira isento de competição com quem quer que seja; apenas com nós próprios, no prazer íntimo de descobrir e também o de verificar a nossa capacidade, para além da técnica advinda do conhecimento.

Nos depoimentos perpassa tanto o gosto pela resolução de problemas como o envolvimento dos alunos, como nos confessa Graça Braga da Cruz:

Inicialmente, a resolução de problemas não fazia parte das minhas preferências, essencialmente porque me sentia insegura. Mas o desafio e a curiosidade exercem uma forte atração; comecei a tentar resolver sozinha; tentar, experimentar, falhar e voltar ao início, ultrapassar obstáculos e, no fim, aquele prazer supremo de exclamar, tal como Martin Gardner, Ah! Consegui! Comecei a interessar-me pelo tema a outro nível: e com os alunos? Procurei ler e estudar sobre o tema, mas é o que afirma Polya, aprende-se a resolver problemas, resolvendo-os.

Mário Roque tira ilações pedagógicas:

Os desafios que os mesmos representam. As aprendizagens que, o envolvimento nos mesmos, me proporcionam. Aprendizagens relativas aos temas em si mas, também (ou se calhar, sobretudo), pedagógicas. O ter que sair da minha “zona de conforto” ajuda-me, muito, a ter mais atenção ao ritmo de aprendizagem dos alunos, em quaisquer tarefas, menos “mecânicas”, que lhes sejam apresentadas.

Os aspetos afetivos são destacados por Alice Martins:

Enquanto sócia da APM e professora, tenho conseguido disponibilizar um tempinho para me dedicar a esta secção, ao longo dos anos, e tenho tentado usufruir daquilo que ela me proporciona. Destaco entre elas problemas que foram resolvidos, com turmas do 3.º ciclo, em salas com computadores que hoje já não existem (usávamos essencialmente o Excel e o Geogebra) e era igualmente gratificante ver os alunos a usar estas ferramentas. Além destes últimos, recordei ainda problemas em cujo enunciado o José Paulo usou os nomes dos meus alunos e até o nome da minha cidade “Torres Novas”.

Ao pedido de opinião sobre quem gosta de resolver problemas de matemática, José Paulo revela-nos:

Sobretudo com os “Desafios”¹ do Público, apercebi-me que havia gente, de todo o tipo e com diferentes graus de instrução, interessada e a pegar neles. Sinto que praticamente toda a gente gosta de resolver problemas, embora algumas pessoas se assustem se lhes parece ou se lhes dizemos que é de matemática... O fator inibidor pode ser resultante de más experiências com a nossa disciplina, que lhes foram criando bloqueios. Se, num momento adequado, conseguirmos apresentar um problema sem “roupagem matemática” mas que obrigue a pensar, verificamos que quase ninguém fica indiferente. Algumas das experiências mais surpreendentes e gratificantes que tive foi em aulas

¹Os “Desafios” do Público foram publicados semanalmente durante 29 anos, sendo a rubrica de maior duração no jornal.

de substituição. Chegava a uma turma onde ninguém me conhecia e eu não conhecia ninguém e passados dez minutos (ou vinte, quando era mais difícil ultrapassar o gelo e as reticências iniciais) praticamente todos, mesmo os que tinham más notas a matemática, estavam entusiasmados a resolver um problema.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA ESCOLA DE HOJE

Para apoiar a reflexão sobre a situação da resolução de problemas na escola, contamos com a opinião do Zé Paulo.

A resolução de problemas já conquistou algum espaço, sem dúvida. Nos anos 70, quando comecei, pouco se falava nisso. Os tempos foram mudando e a situação começou a alterar-se, com a APM a ter uma importante influência. Mas, talvez a partir do final da década de 90, a situação começa a estagnar-se. A diminuição da autonomia dos professores, a imposição de cumprimento de programas demasiado grandes ou desajustados e a importância desmesurada concedida aos exames fazem com que os professores não lhes possam dar a atenção e o espaço devidos.

Sempre achei que são essenciais no ensino. A minha carreira de professor começou por um acaso completo e a dar aulas de Educação Visual durante um mês. Gostei muito. Fui depois “experimentando” outras disciplinas (Geometria Descritiva, Tecnologia Mecânica, Desenho Técnico...) até chegar à Matemática e ver que era aí que tinha de ficar. Ora, em todas elas, eu ia propondo problemas porque um aspeto essencial do ensino, seja em que disciplina for, é pôr as pessoas a pensar, a raciocinar. A partir daí, aprendem tudo muito mais facilmente e com maior profundidade. Nas aulas de Matemática, ainda mais importantes se tornam e muitos problemas tiveram os meus alunos que resolver.

Parece que foi combinado, mas não. São os testemunhos de alunos do Zé Paulo, os tais que muitos problemas tiveram que resolver e que, apesar dos 20 anos passados, mostram que as estórias permanecem.

Ocasionalmente, depois de muitas voltas à cabeça, desistíamos e pedíamos a resolução ao professor, que respondia: “Ninguém disse que ia ser fácil...”. Insistíamos e recebíamos: “A vida é dura...”. Mas logo a seguir dava-nos uma pista e mais uma peça para completar o puzzle. Os problemas eram precedidos de histórias que apresentavam um contexto, que de alguma forma servia para nos ajudar a compreender alguns conceitos mais complicados. Um dia o Zé Paulo contou-nos uma história passada durante o antigo regime, em que ele e os companheiros decidiram fardar um porco de Almirante e soltá-lo na praça do Rossio, em protesto contra o processo de eleição do Américo Tomás. As autoridades agiram rapidamente, capturaram o animal em alguns minutos e apenas uma ou duas dezenas de pessoas assistiu ao desacato, para desalento dos autores.

Surpreendentemente o caso espalhou-se e, uns meses depois, ouviram o episódio descrito e enriquecido por um taxista – que por sua vez um camarada que estava no ultramar lhe relatou – de que um magote de porcos libertinos corria pela cidade de Lisboa, de botas e uniforme. E de repente foi mais fácil compreender as propriedades da função exponencial. Relata Luís Pereira.

Recordo-me das brincadeiras sobre o conceito de infinito e da grandeza relativa deste. De pedir que imaginássemos estar sentados num autocarro com lugares infinitos, mas com uma infinidade de pessoas, como nós, a ocupar todos os lugares. Como poderíamos encontrar lugar para um colega que acabara de entrar? Fácil, pedíamos a toda a infinidade de pessoas para passarem para o lugar diretamente atrás de si, libertando toda a primeira fila do autocarro, o que daria alguma liberdade de escolha à pessoa para decidir o lugar onde sentar. Conta Tiago Cordeiro.

As aulas do professor Zé Paulo eram de uma energia contagiante, fruto dum respeito mútuo e amizade que, se nos primeiros dias surpreendiam, ao longo do tempo se fortaleciam e tornavam parte integral dos processos de aprendizagem. Neste microclima de liberdade, os problemas jamais eram entendidos como deveres mas sim verdadeiros desafios aos limites do nosso conhecimento partilhado que, uma vez discutidos, compreendidos e, por fim, quase sempre depois de algumas desilusões temporárias, conquistados plenamente, deixavam os alunos com a sensação de que tinha valido a pena e de que estavam à altura do próximo desafio, qualquer que ele fosse. Destaca Filipe Boucinha.

Mário Roque, Graça Braga da Cruz e Alice Martins reconhecem os constrangimentos enumerados por Zé Paulo e falam-nos sobre a forma como promovem a resolução de problemas na escola, como utilizam o problema da secção e como reagem os alunos.

O envolvimento com os alunos é feito, normalmente, em atividades extra letivas. Dou-lhes a conhecer o problema e incentivo-os a procurarem dar-lhe saída. Alguns alunos vão reagindo, mas procuro não os influenciar, nem ser influenciado. Passado o prazo, com aqueles que se envolveram e, eventualmente, responderam, converso e sou muitas vezes surpreendido com a forma como abordaram a questão. Os que normalmente se envolvem vão claramente ganhando, nas suas abordagens, maior capacidade de se “distanciarem” da matéria que estamos a dar, naquele momento e ficam muito satisfeitos com o que conseguem obter. Então quando o seu nome sai na Revista!, salienta Mário Roque.

Na introdução de um novo tema procuro iniciar com a proposta de uma situação problemática que desperte a curiosidade e envolva os alunos. O tempo é uma condicionante com muito peso na minha atuação como professora, porque as minhas turmas são de ciências e tecnologias do ensino secundário. Todos os períodos proponho, pelo menos uma vez, uma atividade de grupo que consiste na resolução de um problema relacionado

com conteúdos abordados nesse período. Por vezes, ao longo do ano dou um enunciado de um problema para que os alunos resolvam durante a semana seguinte e cuja resolução é, posteriormente, discutida na aula. Se o problema é apresentado na aula e a sua resolução é alvo de avaliação formal, há um grupo significativo de alunos envolvidos a desenvolver estratégias e a apresentar sugestões para a resolução. Se o enunciado é proposto para casa, vem logo a pergunta: É para nota? E o número de resoluções baixa dramaticamente, revela Graça Braga da Cruz.

Em relação aos desafios, não os proponho todos. Tenho sempre atenção e faço uma seleção, tendo em conta o nível de escolaridade e o tipo de problema. Numa grande parte das vezes, proponho a resolução do problema em aulas de final do período ou em momentos com um número restrito de alunos, como é o caso do apoio facultativo. Resolvemos os exercícios no quadro, com a colaboração de todos, e um dos alunos fica responsável pelo envio. Outras vezes enviam a resolução individualmente. Curiosamente, uma das primeiras reações dos alunos é perguntarem se há prémio. Eu explico-lhes que o importante é resolver o problema, percorrendo as várias etapas necessárias, e depois, mais tarde, mostro-lhes a revista e ofereço a fotocópia da página para recordação e para mostrarem aos pais. De um modo geral, os alunos reagem de forma positiva e é muito compensador observar a persistência de alguns.

Para mim, é importante ter um conjunto de alunos envolvido em sala de aula e que responde sempre com entusiasmo aos desafios que coloco. No entanto, já fiquei surpreendida ao ver, nos participantes, o nome de alunos que resolveram problemas que enviei por email, nomeadamente nas férias. Se, por um lado, os meus alunos sabem que tenho um gosto especial por problemas, por outro, e uma vez que os enunciados que lhes apresento são, de certa forma, cativantes, há sempre algum aluno com imediato interesse na sua resolução, conta Alice Martins.

DOS PROBLEMAS DESTA NÚMERO: QUE PROBLEMA?

Depois de ouvirmos Zé Paulo a apresentar a sua *playlist* na TSE, lançamos-lhe o desafio de identificar também o seu problema preferido usando as três condições que o conduziram na escolha da sua canção favorita “A Hard Rain’s A Gonna Fall”, de Bob Dylan, uma canção que: (1) marcou a sua vida, (2) o fez evoluir e que (3) simplesmente, gosta.

A resposta foi pronta:

Nos anos 60, o acesso à informação era muito restrito e praticamente não existiam livros de divulgação matemática. Os problemas interessantes circulavam boca a boca e era uma sorte chegarem a nós. Um dia, o meu pai chegou a casa com umas folhas dactilografadas e disse-me “Deves gostar de ver isto mas tenho de as

devolver daqui a três dias” (ainda não havia fotocópias...). Estavam lá três problemas extraordinários e que nunca esqueci. Um deles marcou-me para sempre. Era A Batalha de Hastings:

Num antigo documento, encontrou-se este breve relato da batalha de Hastings:

Os exércitos normando e saxão postaram-se frente a frente, formados em quadrado. Os normandos estavam em inferioridade numérica pois tinham menos 512 soldados. No entanto, bateram-se com tal valentia e coragem que conseguiram desbaratar e pôr em fuga o inimigo. No final da terrível batalha, tinham morrido metade dos saxões mas do lado dos normandos os mortos foram poucos. Por coincidência, foi igual o número de sobreviventes em cada um dos lados. Quantos soldados tinha cada um dos exércitos e quantos morreram na batalha?

O enunciado é logo desafiante. Os dados parecem ser manifestamente insuficientes e, nos primeiros momentos, nem acreditamos que haja solução. Quando começamos a resolver, o avanço é lento mas vamos percebendo que podemos utilizar informações que, à primeira vista, se afiguravam inúteis ou irrelevantes (por ex., formados em quadrado ou os mortos foram poucos). De repente, faz-se luz, tudo encaixa e temos ali a solução, única e inevitável.

Foi também naquele momento que percebi que havia um novo tipo de problemas, que é matemático mas vai mais além, onde temos de relacionar informações díspares e alargar o nosso campo de visão. Cresci.

Com um entusiasmo semelhante fomos recebendo as preferências, diversas, de interlocutores desta iniciativa.

Mário gosta especialmente de problemas de *enunciados curtos, abertos, que desafiam a imaginação, que permitem que se vá pensando neles... e que, mesmo depois de resolvidos, nos deixam intrigados: será que encontrei mesmo a resposta?* Escolheu o da Revista 127, que o marcou: *Temos quatro pontos no espaço, não coplanares. Quantos planos existem que sejam equidistantes dos quatro pontos?*

Numa primeira abordagem, pensei que o tinha (bem) resolvido e enviei essa resposta ao Zé Paulo. Pouco tempo depois recebi, dele, uma resposta do tipo “de certeza que não há mais?” Foi bonito, foi!... Ainda faltava mais de um mês para a data limite do envio das respostas e... aquela intrigante mensagem deixou-me atarantado durante todo esse tempo. Mesmo em cima da data limite para o envio da resposta estava quase a desistir e... percebi o que me faltava, a olhar para um canto do teto, aqui em casa. Estou a olhar para lá agora mesmo! Foi um grande “Uau!!!”. Mande então uma mensagem ao Zé Paulo, com o número que tinha encontrado e ele respondeu: “Yes!” E eu saltei... Literalmente! E saltei também para o computador, para escrever a (nova) resposta...

As preferências de Graça vão para os problemas de geometria e desses, aqueles onde a experimentação tem particular relevo. Escolheu um problema de traçado geométrico: *Inscriver um quadrado num triângulo dado. Dois vértices do quadrado devem situar-se sobre a base do triângulo e os outros dois vértices sobre os dois outros lados do triângulo, um em cada.* (Polya, G., *A arte de resolver problemas*, Editora Interciência)

Gostei do problema porque ele constitui um desafio: é uma situação para a qual a estratégia de resolução não é evidente, mas que desperta a curiosidade e leva-nos a tentar um e outro processo; depois permite abordagens com diferentes graus de profundidade, da experimentação, por exemplo usando um programa de geometria dinâmica, à reflexão sobre o trajeto percorrido, à justificação formal do processo.

Para Alice são poucos os problemas que não a deixam agarrada ao lápis e ao papel no dia em que recebe a revista. Mas os preferidos são, sem dúvida, os problemas de números e os de geometria que sejam acessíveis à maioria dos alunos.

Nos problemas que envolvem números, além de usar algumas relações e propriedades, o mais comum é o processo tentativa e erro. Considero que são enunciados que nos prendem até descobirmos a solução. No que diz respeito aos problemas de geometria, fascina-me bastante as relações entre as figuras e os vários processos de abordagem. Por exemplo, na revista 161, o problema “Um losango no retângulo” pode ser resolvido por vários métodos, e é mesmo interessante vermos tudo a dar certo, é como se estivéssemos a fazer uma verificação, no entanto estamos a usar uma estratégia diferente.

Para Alberto a escolha foi muito complicada, pois já resolveu muitos. Importa lembrar que Alberto Canelas e Pedrosa Santos são os leitores que mais respostas enviaram, 76 cada um, mas acabou por optar pelo problema “Encontro na Praça Vermelha” da EeM n.º 24, cuja resposta deu origem a um artigo próprio publicado na EeM n.º 26 “Os espíões da Praça Vermelha”. Tema de grande atualidade política, diríamos nós, e que pode incentivar outros leitores a escrever artigos sobre a resolução de problemas.

Terminamos dando voz a alguns dos que responderam ao questionário *online*, nas mensagens que dirigiram a José Paulo Viana, com o nosso Muito Obrigada!

Agradecer por me ter aberto portas desconhecidas, mesmo sem se ter apercebido disso. Foi o contacto com ele e com o problema do ProfMat que me fez perceber a paixão que tenho sobre resolução de problemas, e que veio a determinar o meu percurso profissional até aos dias de hoje. Começou por determinar o meu projeto de investigação no ano de estágio, e levou-me até ao doutoramento em que estou neste momento. Muito grata por me permitir estas descobertas, grata pelas palavras sempre amáveis, grata pelas oportunidades para o ouvir e pelos ensinamentos, grata pela disponibilidade, grata por mostrar que há muitas formas de vermos a

matemática - cabe a cada um escolher como a quer (vi)ver. E grata, acima de tudo, pela amizade! Letícia Martins.

É uma pessoa/matemático fantástico. Agradeço a iniciativa e a sua capacidade incansável de nos presentear sempre com um bocadinho de matemática de maneiras bem imaginativas. Excelente trabalho! Elsa Francisco.

Espero que continue a dar-nos problemas. Helena Amaral

Gostaria de lhe perguntar como conseguiu apresentar tantos problemas tão interessantes durante tantos anos e dizer-lhe que sou um grande fã do seu trabalho! Manuel Marques.

Que o trabalho que ele faz, incentivando e desenvolvendo o gosto pela resolução de problemas de Matemática, está no centro da Matemática. Fazer Matemática é resolver problemas e aprende-se Matemática resolvendo problemas (a todos os níveis). Jaime Carvalho e Silva.

E, nas palavras de Branca Silveira, lançamos o repto a José Paulo Viana: *Continua por mais 30 :-)*



Permanências

As secções permanentes da Educação e Matemática são uma presença regular na revista ao longo dos anos. A equipa editorial decidiu, neste ano de 2022, destacar o papel destas secções, procurando perceber o sentir dos leitores e editores permanentes. Começamos com *O Problema deste Número*, a secção mais antiga da revista.

Abrimos e fechamos com fotografias² da autoria de José Paulo Viana, numa viagem pelas *Permanências* da EeM, para além das curvas da estrada.

Equipa editorial da EeM

² A primeira fotografia foi tirada no Funchal, em agosto de 2011 e a segunda na Ilha do Pico, em junho de 2009