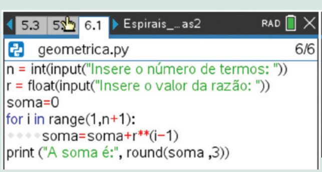
Espirais curiosas

A observação das imagens levará certamente a maioria a concluir que a espiral de maior comprimento é a geométrica, no entanto não é verdade. A espiral geométrica tem um comprimento finito, que pode ser provado através do limite da soma dos termos da progressão. No caso do primeiro termo ser 1, o limite será $\frac{1}{1-r}$, ou seja, no caso indicado, com razão 0,9, a soma será 10.

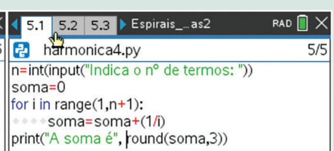
Na segunda espiral, correspondente à chamada série harmónica, o comprimento tende para infinito apesar de o crescimento ser muito lento.

Este pode ser um desafio interessante para os alunos, fundamentalmente pela surpresa da resposta, levando-os a experimentar numa folha de cálculo e, porque não, construindo ou usando um programa de computador. Neste caso deixamos dois pequenos programas para os cálculos das somas, em Python para a Ti-Nspire.

Programas:



```
geometrica.py    6/6
n = int(input("Insere o número de termos: "))
r = float(input("Insere o valor da razão: "))
soma=0
for i in range(1,n+1):
    soma=soma+r**(i-1)
print ("A soma é:", round(soma ,3))
```



```
harmonica4.py    5/5
n=int(input("Indica o nº de termos: "))
soma=0
for i in range(1,n+1):
    soma=soma+(1/i)
print("A soma é", round(soma,3))
```

Esta atividade poderá dar origem a um pequeno projeto, mais prolongado, incluindo a programação em Python para o cálculo das somas, mas também o uso do módulo Turtle para o desenho destas ou outras espirais ou experimentarem com os meios que tiverem disponíveis. No caso da espiral geométrica faz todo o sentido calcular o limite da soma de n termos. No caso da série harmónica, apesar de os alunos não saberem calcular este limite, as dúvidas que ficam da experimentação poderão conduzir à discussão sobre a importância da prova e ao reconhecimento de que "o que parece nem sempre é". A prova, pode também acabar por ser apresentada pelo professor, de forma simples:

Considerando a soma de todos os termos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots$$

Se os agruparmos como indicado:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

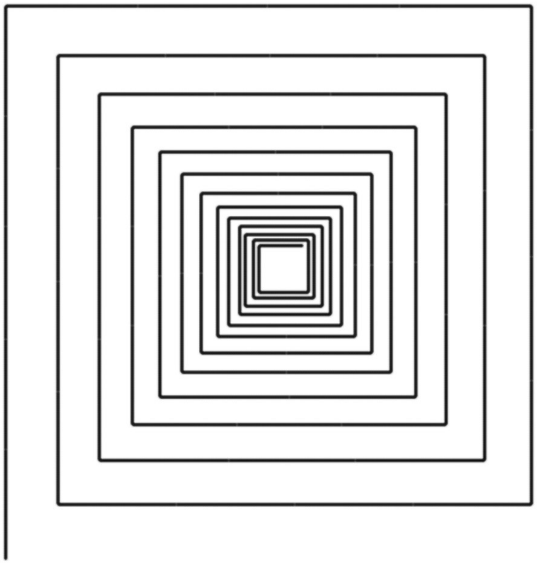
Não é difícil verificar que se substituirmos cada um dos termos de cada parenteses pelo menor:

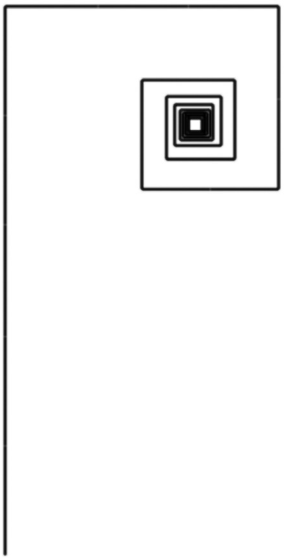
$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots\right)+\ldots,$$

obtemos uma soma de n termos igual a $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$ (ou seja igual a $1+\left(\frac{1}{2}\right)n$) que é inferior à original e que tende para infinito. Portanto a soma da série harmónica tende também para infinito.

Adelina Precatado

Espirais curiosas





Nas imagens estão representadas duas espirais poligonais, na da esquerda os comprimentos dos lados estão em progressão geométrica de razão inferior a 1 (neste caso 0,9), a da direita foi construída tendo por base a chamada série harmónica, ou seja, o primeiro comprimento mede 1, o segundo $\frac{1}{2}$, o terceiro $\frac{1}{3}$, o quarto $\frac{1}{4}$ e assim sucessivamente, o comprimento de ordem n mede $\frac{1}{n}$.

1. Imagina as duas espirais com infinitos termos.
   Qual das duas te parece ter maior comprimento?

2. Conseguirás determinar o valor aproximado para as somas de todos os comprimentos, em cada espiral?
   Experimenta para 50, 100, 1000, 1 000 000, ... de termos. Confirmou-se a tua conjetura inicial?
   Regista o processo usado e os resultados a que chegaste.

3. Conseguirás provar alguma das tuas conjeturas?