Poupança para férias

Para o primeiro dia do ano de 2022, um sábado, a Susana decidiu começar a fazer economias para as próximas férias, guardando no seu mealheiro apenas moedas de um euro e notas de 5.

No primeiro sábado, meteu lá um euro e em cada sábado seguinte irá pondo sempre mais um euro do que no anterior, tendo o cuidado de inserir o mínimo de moedas possível. Por exemplo, no 13.º sábado colocará duas notas de cinco e três moedas.

A Susana vai parar quando, pela primeira vez, o número de notas for igual ao de moedas.

Em que dia vai isso acontecer e quantos euros terá o mealheiro?

(Respostas até 28 de março, para **zepaulo46@gmail.com***)*

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

O problema proposto no número 160 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Escolher uma das quatro alternativas (A, B, C ou D) para cada uma das cinco afirmações seguintes de modo que todas estas sejam verdadeiras.

1) O número de afirmações com resposta D é:

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0

2) A resposta a esta questão é:

A) A B) B C) C D) D

3) Esta afirmação tem a mesma resposta que a questão

A) 5 B) 4 C) 1 D) 2

4) A primeira resposta B aparece na pergunta:

A) 5 B) 4 C) 2 D) 3

5) As duas únicas questões consecutivas com a mesma resposta são:

A) 3 e 4 B) 4 e 5 C) 2 e 3 D) 1 e 2

Recebemos 11 respostas: Alice Martins (Torres Novas), Carla Faria (Guimarães), Carlos Dias (Silveira), Gonçalo Florêncio (Torres Novas), Guilherme Salvador (Torres Novas), Letícia Martins (Guimarães), Mário Roque (Guimarães), Miguel Rosario (Torres Novas), Rogério Berrincha (Teixoso), Susana Dias (Torres Novas) e Tiago Carreira (Torres Novas).

Desta vez isto não era fácil, como se pode comprovar pela forma como o **Carlos Dias** começa:

Este problema afigurou-se-me inicialmente "intratável". Acabei por o resolver com recurso a uma folha de cálculo que envio em anexo. Havendo cinco afirmações com quatro hipóteses de resposta para cada uma temos um total de 1024 possibilidades (= 1024). Analisar cada uma destas possibilidades torna-se fastidioso e sujeito a erros. (…). Deste modo usei uma folha de Excel que analisa todas as 1024 hipóteses com recurso a várias funções da aplicação.

Claro que chegou à resposta certa, mas outros participantes houve com abordagens mais "tradicionais". Vejamos duas delas, começando pela do **Mário Roque**:

O primeiro problema foi… decidir por onde começar! Depois de algumas tentativas, resolvi ser original e… começar pelo início!
Afirmação 1:
– não pode ser a D (contradição imediata), nem a B (a 4 exclui esta hipótese);
– também não pode ser a A pois, nesse caso, a opção D teria que aparecer 3 vezes. Como não podemos ter mais do que duas questões consecutivas com a mesma resposta, à 2 e à 5 teria necessariamente que corresponder a D. Mas, então, esta última implicaria que na 1 também fosse a D a resposta certa…
Ou seja, à afirmação 1 corresponde a alternativa C.
Existe, por isso, uma e uma só resposta correta D.
Afirmação 3:
– não pode ser a A (pois então teríamos a 5 e, consequentemente, a 4 também com essa alternativa…)
– não pode ser a B (a 4 exclui essa hipótese!)
– não pode ser a D, pois isso implicaria pelo menos duas respostas D corretas, o que já vimos não ser verdade.
Portanto, à afirmação 3 corresponde a alternativa C.
Das três questões restantes, a (única) que pode ter a D como alternativa correta é a afirmação 2. De facto:
– a 4 implicaria que a 3 fosse a B (e já vimos que não)
– a 5 implicaria que a 1, 2 e 3 ficassem com a mesma resposta (C).
Finalmente, como ainda não temos duas afirmações consecutivas com a mesma resposta, às afirmações 4 e 5 terá que corresponder a alternativa B. A outra hipótese que nos restaria (3 e 4 com a mesma resposta) não pode ser, pois isso implicaria a resposta C para a 4 e, logo, a B para a 2, o que já sabemos ser falso.
Ou seja, as opções corretas para cada uma das afirmações são, respetivamente: C – D – C – B – B

A estratégia do **Guilherme Salvador** foi ir eliminando as opções que entravam em contradição:

1. *Descartar hipótese D na pergunta 1 (não poderiam haver 0 respostas D, sendo que a própria resposta seria um D).*
2. *Descartar hipótese B na pergunta 1 (pergunta 4 descarta hipótese B na pergunta 1, pois não existe a opção da primeira resposta B surgir na pergunta 1).*

3. *Descartar hipótese A na pergunta 3 (se a resposta a 3 e 5 fosse A, a resposta a 4 teria de ser A, ficando três perguntas consecutivas com a mesma resposta).*
4. *Descartar hipótese B na pergunta 3 (resposta a 4 teria de ser B indicando que o primeiro B apareceria na pergunta 4 e não na 3).*
5. *Descartar hipótese A na pergunta 5 (exigiria que a hipótese B da pergunta 3 estivesse correta e já foi descartada).*
6. *Descartar hipótese D na pergunta 4 (a resposta a 3 não pode ser um B).*
7. *Descartar hipótese D na pergunta 3 (de acordo com as opções restantes para a pergunta 1, podem existir uma ou três opções D, logo se 2 e 3 tivessem D como resposta teria de existir mais uma pergunta com resposta D que só poderia ser a pergunta 5 pelas opções restantes. No entanto, esta opção exigiria que a resposta a 1 fosse também D, uma hipótese já descartada).*
8. *Resposta à pergunta 3 só pode ser C, logo a resposta à pergunta 1 é também C.*
9. *Descartar hipóteses C e D na pergunta 5 (exigiriam que a resposta a 2 fosse também C, originando 3 respostas consecutivas iguais).*
10. *Resposta à pergunta 5 é B, logo a resposta à pergunta 4 é também B.*
11. *Resposta à pergunta 2 é D (tem de haver uma pergunta com resposta D de acordo com 1).*

Assim as respostas às perguntas são C–D–C–B–B.

A abordagem da **Susana Dias** foi começar pela questão 5, visto ela ser a mais condicionante, e ir testando como verdadeira cada uma das suas opções até encontrar uma que não entrasse em contradição com as outras questões.

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

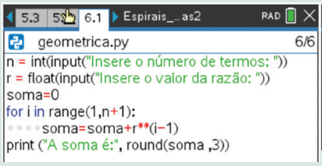
Espirais curiosas

A observação das imagens levará certamente a maioria a concluir que a espiral de maior comprimento é a geométrica, no entanto não é verdade. A espiral geométrica tem um comprimento finito, que pode ser provado através do limite da soma dos termos da progressão. No caso do primeiro termo ser 1, o limite será $\frac{1}{1-r}$, ou seja, no caso indicado, com razão 0,9, a soma será 10.

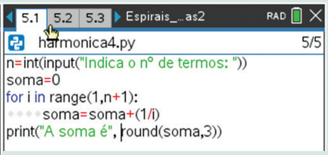
Na segunda espiral, correspondente à chamada série harmónica, o comprimento tende para infinito apesar de o crescimento ser muito lento.

Este pode ser um desafio interessante para os alunos, fundamentalmente pela surpresa da resposta, levando-os a experimentar numa folha de cálculo e, porque não, construindo ou usando um programa de computador. Neste caso deixamos dois pequenos programas para os cálculos das somas, em Python para a Ti-Nspire.

Programas:




```
n = int(input("Insere o número de termos: "))
r = float(input("Insere o valor da razão: "))
soma=0
for i in range(1,n+1):
    soma=soma+r**(i−1)
print ("A soma é:", round(soma ,3))
```




```
n=int(input("Indica o nº de termos: "))
soma=0
for i in range(1,n+1):
    soma=soma+(1/i)
print("A soma é", round(soma,3))
```

Esta atividade poderá dar origem a um pequeno projeto, mais prolongado, incluindo a programação em Python para o cálculo das somas, mas também o uso do módulo Turtle para o desenho destas ou outras espirais ou experimentarem com os meios que tiverem disponíveis. No caso da espiral geométrica faz todo o sentido calcular o limite da soma de n termos. No caso da série harmónica, apesar de os alunos não saberem calcular este limite, as dúvidas que ficam da experimentação poderão conduzir à discussão sobre a importância da prova e ao reconhecimento de que "o que parece nem sempre é". A prova, pode também acabar por ser apresentada pelo professor, de forma simples:

Considerando a soma de todos os termos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots$$

Se os agruparmos como indicado:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

Não é difícil verificar que se substituirmos cada um dos termos de cada parenteses pelo menor:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots\right)+\ldots,$$

obtemos uma soma de n termos igual a $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$ (ou seja igual a $1+\left(\frac{1}{2}\right)n$) que é inferior à original e que tende para infinito. Portanto a soma da série harmónica tende também para infinito.

Adelina Precatado