Cálculo algébrico simbólico (CAS) em contexto de sala de aula com alunos do ensino secundário

Nos últimos anos tem-se assistido a uma grande expansão de aplicações informáticas, em particular na Matemática, na tentativa de criar o gosto pela disciplina, recorrendo essencialmente à resolução de problemas (Kissane, McConney & Ho, 2015).

No sentido de desenvolver conceitos relacionados com a Estatística surgiram as folhas de cálculo, da qual o *Microsoft Excel*®, é o exemplo mais comum. De forma a trabalhar conceitos da Geometria foram desenvolvidos programas de geometria dinâmica, como, por exemplo, o *GeoGebra*, que permite o estabelecimento de conexões entre a Geometria, a Estatística e as Funções, além de possibilitar a pesquisa da 'realidade aumentada'. Em simultâneo, e com o advento da *Internet*, surgiram diversas plataformas de ensino como, por exemplo o *Moodle*, bem como outro tipo de aplicações para o telemóvel como o *Kahoot!*, ou o *Photomath*.

Paralelamente, nos finais da década de oitenta do século XX, assistimos, nos países mais industrializados, ao aparecimento de calculadoras gráficas com capacidades numéricas, gráficas e estatísticas, às quais foram posteriormente introduzidos sistemas algébricos, muito devido à introdução de programas como o *Maple*, o *Mathematica*, ou o Derive, permitindo assim a utilização do *cálculo algébrico simbólico* (CAS) por alunos do ensino superior (Kissane et al., 2015).

Com este trabalho pretende-se ilustrar alguns aspetos da introdução do CAS em aula, em particular a forma como os alunos interiorizam a génese instrumental, conceito introduzido por Rabardel (1995).

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

As calculadoras com capacidades algébricas são desde há largos anos utilizadas em diversos países no ensino secundário, como destaca o relatório das *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática* (Carvalho e Silva, Canavarro, Albuquerque, Mestre, Martins, Almiro, Santos, Gabriel, Seabra, & Correia, 2020).

Para Lagrange (2005), a generalidade dos problemas de Matemática que envolvem conceitos relacionados com álgebra e/ou cálculo, que são colocados aos alunos no ensino secundário, além de, na sua grande maioria, poderem ser resolvidos recorrendo a técnicas usuais de *papel-e-lápis*, ou manipulação algébrica, por vezes morosas e algo fastidiosas, podem igualmente ser resolvidos usando tecnologias com CAS, possibilitando a obtenção de melhores resultados na compreensão conceptual dos alunos (Handal, Cavanagh, Wood, & Petocz, 2011).

Atualmente, o uso do CAS passa pela utilização de processos relacionados com sistemas de *software*, os quais envolvem manipulação de símbolos matemáticos, daí este processo se designar por manipulação simbólica, podendo estar associada a representações gráficas ou numéricas, bem como à exploração de folhas de cálculo e de programas de geometria dinâmica.

Uma boa utilização desta ferramenta em aula permite que os alunos pensem e reflitam sobre as diversas representações de determinado tipo de conceitos matemáticos, bem como estabeleçam conjeturas que poderão ser validadas ou refutadas tendo por base uma boa argumentação.

Existem muitos fatores intrínsecos que influenciam a decisão do professor no sentido de usar ou não a tecnologia, nomeadamente: as orientações dos programas oficiais; a noção que se tem da utilização da tecnologia; a perceção da natureza do conhecimento matemático e a forma como deve ser ensinado; o conteúdo do conhecimento matemático; e o conhecimento matemático do professor para ensinar (Heid et al., 2013).

Atendendo a Lokar e Lokar (2000), ao elaborar tarefas para utilização em aula, bem como questões para testes e exames, é possível distinguir cinco tipos de categorias de perguntas e respetivo grau de envolvimento com o CAS, sendo que, na prática, pode acontecer que uma mesma questão se encaixe em mais do que uma categoria, atendendo aos diferentes processos que se podem utilizar na sua resolução. Assim, tem-se:

- *T0: Questões em que a utilização do CAS é mínima ou inexistente.*
- *T1: Questões tradicionais.*
- *T2: Questões que servem para testar a capacidade de utilização do CAS.*
- *T3: Questões que resultam de um enunciado tradicional.*
- *T4: Questões que têm uma resolução difícil ou mesmo impossível utilizando exclusivamente técnicas de manipulação algébrica.*

A escolha das tarefas ou problemas a desenvolver deve ser feita com critério, não se cingindo a exercícios ditos tradicionais cujo CAS pouco ou nada acrescenta. Ao aluno deve ser dada a oportunidade de realizar tarefas que testem a real dimensão do CAS e, como tal, é necessário atender à forma como o utilizador se apropria e usa a calculadora gráfica e o CAS, processo esse que se designa por génese instrumental (Rabardel, 1995).

Entende-se por génese instrumental a transformação do artefacto, gerada pela ação do sujeito, tornando-o num instrumento à medida que o aluno passa pelo processo de instrumentação com a integração na sua prática. Para Rabardel (1995), um instrumento não é mais do que o resultado de uma construção psicológica, é uma entidade constituída por um artefacto e por um esquema, sendo na relação entre ambos que se dá a génese instrumental.

TRABALHO DE CAMPO

Para a execução deste trabalho foi utilizada uma abordagem qualitativa de natureza interpretativa, em que o investigador foi um participante ativo na investigação.

O estudo apresentado resulta de um estudo mais amplo que foi efetuado ao longo do ano letivo de 2018/19, numa escola secundária da zona de Lisboa, em três turmas do curso de Ciências e Tecnologias, do 12.º ano, sendo que em duas delas o investigador foi igualmente o professor.

Incidiu em 83 alunos, 43 do género masculino e 40 do género feminino, que se encontravam a frequentar a disciplina de Matemática A. A média de idades, no princípio do ano letivo, era de 17 anos.

No início do trabalho de campo, foi solicitado aos alunos que se organizassem em grupos de 4 ou 5 elementos, livremente, com o objetivo de resolver diversas tarefas recorrendo a técnicas de manipulação algébrica e/ou processos numéricos, gráficos e simbólicos, estes últimos através da utilização de calculadoras gráficas TI-nspire™ CX CAS.

Foram efetuadas no total 18 sessões de introdução ao CAS, seis por turma, e em todas estas sessões houve lugar à recolha de documentos escritos produzidos pelos alunos, bem como à captação da informação obtida nas calculadoras gráficas com CAS, quer guardando os ficheiros de trabalho, quer copiando alguns écrans das calculadoras enquanto os alunos se encontravam a trabalhar nas suas mesas, quer ainda através da utilização da aplicação TI-Navigator™. Os discursos apresentados neste artigo foram registados em papel no decurso da aula.

Neste trabalho apresentam-se os primeiros passos efetuados no decurso da 1.ª sessão de trabalho, no 1.º período, nas turmas A e B, pretendendo-se efetuar uma análise interpretativa dos desempenhos dos alunos na resolução de tarefas propostas pelo investigador. Na figura 1 encontra-se a 1.ª tarefa proposta.

> Considerando $x = 1{,}2$ e $y = -2$, calcula o valor das expressões seguintes e comprova o valor obtido utilizando processos simbólicos:
>
> **a)** $4 \cdot x - 3 \cdot y$ **b)** $\pi \cdot x^2 + y \cdot \pi$ (v. e. e com 2 c.d.)
>
> Na calculadora: a) $4 \cdot x - 3 \cdot y \mid x = 1{,}2$ and $y = -2$

Figura 1. Tarefa proposta na sessão inicial

Apresenta-se, em seguida, o diálogo efetuado entre dois alunos do grupo 1A[1], alunos António[2] e Bernardo, a propósito da alínea a) apresentada na figura 1:

António: Onde se encontra a instrução com o traço vertical?
Bernardo: Olha aqui. Está a azul, em cima da tecla do igual.
António: Pois está. Temos que carregar primeiro na tecla ctrl. É isso, não é?
Bernardo: Tenta!!! [pausa] Insere o resto da instrução.
António: E o *and*? Onde está?
Bernardo: Tenta escrever… [pausa] Resultou, deu 10,8!!! (A_1)[3]

Como se verifica pela aplicação da tarefa da figura 1, os alunos encontram-se numa fase de testar a calculadora com CAS de modo a conseguirem futuramente dominar o processo de génese instrumental. De referir igualmente que os menus apresentados nesta calculadora não são muito diferentes dos utilizados no modelo semelhante sem CAS que a generalidade dos alunos incluídos na experiência possuía e utilizava usualmente. A grande dificuldade enfrentada pelos alunos nesta fase prendeu-se com o facto de, na sua grande maioria, estes estarem habituados a utilizar a calculadora para efetuar representações numéricas, bem mais simples, ou representações gráficas.

Outra das tarefas proposta aos alunos na fase inicial encontra-se na figura 2, na qual se pretendia que os alunos obtivessem o conjunto-solução de equações e inequações, usando processos analíticos e simbólicos, sendo que nos dois casos apresentados deveriam recorrer à instrução *solve()*.

> Determina o conjunto solução das condições seguintes, em ordem à variável indicada, usando papel e lápis, e posteriormente, com a calculadora, confirma o resultado obtido:
>
> **a)** $\frac{1}{x} + \frac{3}{x+2} = 2 \quad (x)$ **b)** $t \geq \frac{4}{t} \quad (t)$
>
> Na calculadora: a) *solve*$\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x+2} = 2, x\right)$

Figura 2. Tarefa proposta na sessão inicial

Relativamente à questão apresentada na figura 2, alínea a), resolvida pelo grupo 3A, apresenta-se o diálogo entre os alunos Carlos e Daniela, acompanhado de perto pelo professor/investigador:

Carlos: Onde está o *solve*?
Daniela: Deixa ver. [pausa] Talvez na tecla *menu*.
Carlos: Será? Não encontro.
Daniela: Talvez esteja no *Cálculo*… [pausa] Não.
Carlos: Tenta em *Álgebra*.
Professor: solve é a instrução equivalente a *Resolver*.
Daniela: Coloco *Resolver*?
Professor: Tenta…
Carlos: Deixa ver. [o aluno coloca a instrução *Resolver*] Aparece solve no visor.
Daniela: Será que é assim? [mostra ao investigador a instrução sem o *x* e carrega em *enter*]
Carlos: Não resultou. [mostra um ar admirado]

Professor: Falta a indicação de variável x no final.
Carlos: Pois é. [coloca a variável]
Daniela: As soluções são -1 e 1. E está aqui um triângulo a amarelo, no início da linha. [aponta para a calculadora]
Carlos: O que quer isto dizer? [dirigindo a pergunta ao professor] (A_1)

Como se verifica pelo diálogo apresentado, existe aqui um processo de instrumentalização da calculadora com CAS por parte dos alunos, sendo que a calculadora em geral e, o CAS em particular, contribuíram para tornar mais objetiva a atividade dos utilizadores, nomeadamente quando os alunos referem explicitamente a simbologia utilizada para obter o conjunto solução da condição proposta na calculadora.

Na sequência desta pergunta, efetuada pelo Carlos, o professor, dirigindo-se a toda a turma e apontando para o visor da calculadora dos alunos citados, que se encontrava projetado no quadro, por via da aplicação TI-Navigator™, afirmou que tal facto se fica a dever ao domínio da expressão não ser R.

Professor: Reparem que o domínio da expressão é $\mathbb{R}\backslash\{-2,0\}$ e cada uma das soluções, -1 e 1, verificam o domínio.
Eduardo: E se o domínio fosse $\mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$?
Professor: O que acham que aconteceria?
Francisco: Seria somente o 1?!
Professor: Muito bem. (A_1)

Neste diálogo entre a turma e o professor constata-se que os alunos construíram adequadamente um processo de abstração, percebendo qual a razão pela qual o triângulo aparecia e conseguindo proceder, quer a uma generalização, quer à reversão do processo.

Na alínea b) da questão apresentada na figura 2, verificou-se que muitos dos alunos não efetuaram de forma inteiramente correta a manipulação algébrica da expressão assinalada, sendo que apresentaram um processo de resolução para a inequação resultante ($t^2 \geq 4$) como se de uma equação se tratasse.

A esses alunos foi sugerido pelo professor que colocassem a expressão inicial na calculadora e indicassem o conjunto-solução, devendo depois resolver a inequação utilizando manipulação algébrica, sem retirar os denominadores e recorrendo a um quadro de sinais. Verificou-se neste caso que, relativamente à resolução algébrica de inequações racionais, o processo de resolução ainda não se encontrava consolidado.

De qualquer das formas o objetivo pretendido com a questão era que os alunos estabelecessem relações entre as diversas representações utilizadas na resolução da inequação, nomeadamente a manipulação algébrica e a resolução simbólica, com recurso à calculadora, e tal objetivo foi atingido no caso do grupo 2A. O resultado obtido na calculadora por este grupo encontra-se expresso na figura 3.

Figura 3. Resolução simbólica da alínea b), grupo 2A (A_1)

Aparentemente nestes alunos houve uma interiorização do processo que permitiu que utilizassem de forma eficaz a calculadora e o CAS, o que fez com que a manipulação simbólica fomentasse nestes a necessidade de recorrer à manipulação algébrica ou analítica para estabelecer a conexão entre os resultados obtidos. O procedimento analítico correto, utilizado posteriormente pelos alunos desse mesmo grupo, os quais falharam uma primeira tentativa de resolução, está na figura 4, sendo que, como se pode constatar, onde se encontra t≤2, deveria estar t≥2.

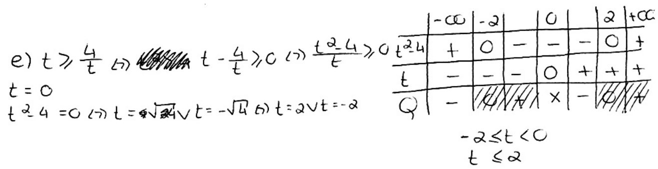

Figura 4. Resolução analítica da alínea b), grupo 2A (A_1)

Ainda no decurso desta abordagem inicial e no sentido de estabelecer conexões entre os três procedimentos possíveis, analítico, simbólico e gráfico, foi solicitado aos alunos que executassem a tarefa constante na figura 5.

Considera a equação $-x^2 + 4x - 3 = 2 - |x|$.
Determina o conjunto-solução utilizando:
a) processos exclusivamente analíticos;
b) gráficos, recorrendo à calculadora;
c) o comando solve() na calculadora.
Nota: Na questão b), apresenta valores arredondados às centésimas.
Na calculadora: c) solve$(-x^2 + 4 \cdot x - 3 = 2 - |x|, x)$

Figura 5. Tarefa proposta na sessão inicial.

Apresenta-se em seguida o diálogo tido entre as alunas Gabriela e Helena, do grupo 7B, com o objetivo de obterem uma resolução por via analítica da questão apresentada na figura 5.

Gabriela: O que temos que fazer?
Helena: Talvez isolar o módulo passando-o para o primeiro membro. O que achas?
Gabriela: Acho que sim. Fica igual a x^2-4x+5
Helena: Concordo. [pausa] A partir daqui basta colocar igual à expressão que está no segundo membro ou ao seu simétrico.
Gabriela: E depois é só aplicar a fórmula resolvente nas duas expressões. (B_1)

Estes comentários tiveram como resultado a resolução que se encontra na figura 6.

$$-x^2+4x-3 = 2-|x| \qquad |x|\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

$$\text{a) } |x| = x^2-4x+3+2 \Leftrightarrow$$
$$(-x^2+4x-3-2 = x \land x\geq 0) \lor (-x^2+4x-3-2 = -x \land x<0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-x^2+3x-5=0 \land x\geq 0) \lor (-x^2+5x-5=0 \land x<0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\varnothing \lor (x^2-5x+5=0 \land x<0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\varnothing \lor \left(x=\frac{5\pm\sqrt{25-20}}{2}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{5}}{2} \lor x=\frac{5-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{C.S.}\left\{\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Figura 6. Resolução da alínea a), grupo 7B (B_1)

É de assinalar, como algo bastante positivo, o cuidado colocado pelo grupo destas duas alunas na distinção efetuada para o sinal de . Este grupo 7B efetuou igualmente uma resolução gráfica recorrendo à calculadora gráfica com CAS, que foi posteriormente passada para a folha de respostas e que se encontra na figura 7.

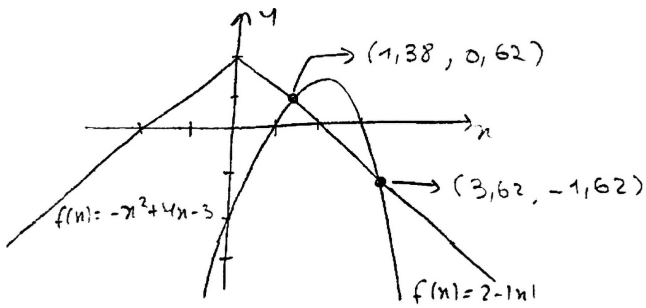

Figura 7. Resolução da alínea b), grupo 7B (B_1)

Nesta resolução observam-se as coordenadas dos pontos de interseção entre a função definida pela expressão $2-|x|$ e a função definida por $-x^2+4x-3$, não sendo apresentado o conjunto-solução, como seria expectável. Este grupo apresentou igualmente uma resposta à alínea c) que se encontra na figura 8.

$$\text{Solve}(-x^2+4\cdot x-3=2-|x|, x)$$
$$x=\frac{-(\sqrt{5}-5)}{2} \quad \text{or} \quad x=\frac{\sqrt{5}+5}{2}$$

Figura 8. Resolução da alínea c), grupo 7B (B_1)

Embora nas resoluções apresentadas pelos alunos do grupo 7B não seja claro que tenham estabelecido conexões entre os diferentes processos utilizados na resolução, estes foram questionados posteriormente e verificou-se que essas conexões foram efetivamente estabelecidas.

CONCLUSÕES

Estes são alguns exemplos que permitem constatar que a utilização do CAS potencia a utilização da manipulação algébrica.

Os resultados obtidos na análise das tarefas propostas, essencialmente do tipo T0, T1 e T2, definidos por Lokar e Lokar (2000), permitem perceber uma boa integração da calculadora gráfica com CAS, nomeadamente o domínio instrumental dos dois artefactos, calculadora e CAS, sendo que a utilização da calculadora com estas caraterísticas possibilitou a resolução das questões apresentadas utilizando manipulação simbólica e gráfica, processos esses que complementados com a utilização da manipulação algébrica permitiram que os alunos consolidassem o seu conhecimento.

Em síntese, o CAS deve ser visto como um complemento a técnicas de manipulação algébrica utilizadas na álgebra e no cálculo, permitindo essencialmente um menor gasto de tempo e possibilitando que o aluno desenvolva processos de raciocínio criativos conducentes à resolução de problemas matemáticos.

Referências

Carvalho e Silva, J., Canavarro, A., Albuquerque, C., Mestre, C., Martins, H., Almiro, J., Santos, L., Gabriel, L., Seabra, O., & Correia, P. (2020). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática.* Lisboa: DGE.

Handal, B., Cavanagh, M., Wood, L., & Petocz, P. (2011). Factors leading to the adoption of a learning technology: The case of graphics calculators. *Australasian Journal of Educational Technology. 27*(2), 343-360.

Heid, M., Thomas, M., & Zbiek, R. (2013). How might computer algebra systems change the role of algebra in the school curriculum? Em M. A. Clements et al. (Eds.). *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 597-641). Nova Iorque: Springer Science+Business Media.

Heugl, H. (2017). *The use of CAS in exams.* A lecture at the T3 conference in Chicago.

Kissane, B., McConney, A., & Ho, K. F. (2015). *Review of the use of technology in Mathematics education and the related use of CAS calculators in external examinations and in post school tertiary education settings.* Perth, WA: School Curriculum and Standards Authority.

Lagrange, J. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. Em D. Guin, K. Ruthven, L. Trouche (Eds.); *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument* (pp 113-135). Boston: Springer.

Lokar, M., & Lokar, M. (2000). Exam questions and basic skills in technology-supported mathematics teaching. Em V. Kokol-Voljc et al (Eds.); *Final Matura Examination – Matura in the View of CAS* (pp. 133-136). Hagenburg, Áustria.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.

Helder Martins

Escola Secundária António Damásio – Lisboa

António Domingos

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, FCT NOVA e CICS.NOVA

Este trabalho foi suportado por fundos nacionais através da FCT-Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P., no contexto do projeto PTDC/CED-EDG/32422/2017

Fica aqui igualmente o agradecimento devido à empresa TEXAS INSTRUMENTS, pela cedência do material necessário à recolha de dados.