

Estratégias para o cálculo de diferenças de números inteiros e sua fundamentação matemática

GRACIOSA VELOSO
PEDRO ALMEIDA

Este artigo surge na sequência do intitulado “Adição e subtração de números inteiros: papel das propriedades operatórias na fundamentação dos processos de cálculo”, publicado no número 159 desta revista.

Discutiremos os principais processos de cálculo mental que podem ser usados na subtração e fundamentá-los matematicamente. Esperamos poder contribuir para o desenvolvimento da formação inicial e contínua de professores dos anos iniciais, a nível do conhecimento da e sobre a matemática que se ensina. Na linha do que é argumentado por Ball et al (2008), quem ensina tem de dominar profunda e compreensivamente os conceitos, estratégias a serem aprendidos pelos alunos.

Alguns dos processos de cálculo que apresentamos transcendem os que são trabalhados nos anos iniciais, mas consideramos que o seu conhecimento é necessário ao professor em virtude das suas funções de observador, intérprete e orientador das ações dos seus alunos, e de gestor do ambiente de sala de aula.

A determinação de diferenças, por cálculo mental, é significativamente mais complexa que a determinação de somas, nomeadamente nas situações em que, na mesma ordem, o algarismo do aditivo representa um número inferior ao do subtrativo. O processo da decomposição decimal dos dois termos em $72 - 54 = (70 + 2) - (50 + 4) = 70 - 50 + (2 - 4)$, contrariamente ao sucedido na adição, tem associadas dificuldades ou/e hesitações na decisão sobre o que fazer com a diferença entre os números na ordem das unidades de modo a que seja mantida a invariância dos resultados. Há vários modos de evitar o aparecimento de diferenças negativas, como mostraremos.

Consideremos as expressões $310 - 60$ e $347 - 78$, em que nas mesmas posições surgem, no aditivo, algarismos que representam números menores que os correspondentes no subtrativo.

Analisemos um dos vários processos para a determinação da diferença associada a $310 - 60$. A escolha dos números 310 e 60 é justificada por ambos serem múltiplos de 10. É facilitador do cálculo que o subtrativo seja múltiplo de 10, tal como já afirmámos no artigo anterior. Sendo o aditivo também múltiplo de 10, é possível relacionar a diferença pretendida com a diferença entre 31 e 6, como se mostra a seguir: $310 - 60 = (31 - 6) \times 10 = 25 \times 10 = 250$. Os procedimentos aqui adotados são fundamentados pela propriedade distributiva

da multiplicação relativamente à subtração. O processo seguido permite valorizar:

- i) a conexão com a diferença entre 31 e 6 e
- ii) a propriedade do fecho do conjunto dos múltiplos de 10 relativamente à subtração, que pode ser enunciada afirmando que a diferença entre dois múltiplos de 10 é também múltiplo de 10.

Analisemos os processos para obtenção de $347 - 78$ apresentados na Tabela 1.

A escolha dos números 347 e 78 deve-se a: (i) nem eles, nem a diferença, são múltiplos de 10; (ii) os algarismos que figuram nas posições das dezenas e das unidades representam nos aditivos números menores que os correspondentes no subtrativo; (iii) tanto o aditivo como o subtrativo distam valores diferentes de cada um dos respetivos múltiplos de 10 mais próximos.

O processo A.1 iniciou-se com a decomposição decimal dos termos operatórios, ou seja, foram explicitados os números representados pelos algarismos na posição das dezenas e na das unidades. Este processo de decomposição de números de dois algarismos é designado, em muita da literatura associada, pela sigla 1010 (Beishuizen, 1993). Sendo muito utilizado na determinação de somas, pode conduzir na subtração a diferenças negativas, como se mostra no exemplo em A1. Como é bem desenvolvido e justificado pela literatura (Beishuizen, 1993; Baroody, 2016), as crianças, muito frequentemente, apresentam resultados incorretos, porque determinam a diferença entre o maior e o menor valores naturais, sem procederem a alterações implicadas pela troca efetuada. Este processo tem a limitação de não poder ser representado em linha numérica, ficando reduzido a eventual representação em esquema em árvore.

No processo A.2 manteve-se o aditivo e decompôs-se o subtrativo, 78, em três parcelas, convenientes ao cálculo. Uma delas, 70, possibilitando dar saltos de 10 em 10. Este procedimento, de incluir, na decomposição do subtrativo, uma parcela que seja múltiplo de 10, é representado por N10 (Beishuizen, 1993). As outras duas parcelas, 7 e 1, decomposição aditiva de 8, justificam-se tendo em consideração que o aditivo é 347. Na linha numérica, a potencialidade da utilização de múltiplos de 10 pode manifestar-se de diferentes modos; por exemplo, a decomposição do subtrativo 78 em $7+40+30+1$,

Tabela 1. Processos e procedimentos de cálculo de $347 - 78$.

A. Decomposição de termos de $347 - 78$

A.1. Decomposição decimal dos dois termos (1010)

$$\begin{aligned}(300 + 40 + 7) - (70 + 8) &= 300 + 40 + 7 - 70 - 8 = \\ &= 300 + (40 - 70) + (7 - 8) = \\ &= 300 + (-30) + (-1) = \\ &= 270 - 1 = \\ &= 269\end{aligned}$$

A.2. Decomposição do subtrativo em parcelas convenientes (N10)

$$\begin{aligned}347 - 78 &= 347 - (70 + 7 + 1) = \\ &= 347 - 7 - 70 - 1 = \\ &= 340 - 70 - 1 = \\ &= 270 - 1 = \\ &= 269\end{aligned}$$

B. Mobilização do complemento aritmético¹ do subtrativo.

$$\begin{aligned}347 - 78 &= 347 - (100 - 22) = \\ &= 347 - 100 + 22 = \\ &= 247 + 22 = \\ &= 269\end{aligned}$$

C. Variação de um dos termos de $347 - 78$, mantendo o outro.

C.1. Adicionar 31 ao aditivo

$$\begin{aligned}378 - 78 &= 300 \\ \text{Relacionando as duas diferenças:} \\ 378 - 78 &= (347 + 31) - 78 = (347 - 78) + 31 \\ \text{Portanto,} \\ 347 - 78 &= (378 - 78) - 31 = \\ &= 300 - 31 = \\ &= 270 - 1 = 269\end{aligned}$$

C.2. Subtrair 31 ao subtrativo

$$\begin{aligned}347 - 47 &= 300 \\ \text{Relacionando as duas diferenças:} \\ 347 - 47 &= 347 - (78 - 31) = (347 - 78) + 31 \\ \text{Portanto,} \\ 347 - 78 &= (347 - 47) - 31 = \\ &= 300 - 31 = \\ &= 270 - 1 = 269\end{aligned}$$

D. Variação igual de cada um dos termos de $347 - 78$.

D.1. Adicionar 2

$$\begin{aligned}(347 + 2) - (78 + 2) &= \\ &= 349 - 80 = \\ &= 340 + 9 - 80 = \\ &= 340 - 80 + 9 = \\ &= (34 - 8) \times 10 + 9 = \\ &= 26 \times 10 + 9 = \\ &= 260 + 9 = 269\end{aligned}$$

D.2. Subtrair 8

$$\begin{aligned}(347 - 8) - (78 - 8) &= \\ &= 339 - 70 = \\ &= (340 - 1) - 70 = \\ &= 340 - 70 - 1 = \\ &= 270 - 1 = 269\end{aligned}$$

E. Variação diferente dos dois termos de $347 - 78$.

E.1. Adicionar 3 ao aditivo e 2 ao subtrativo

$$\begin{aligned}350 - 80 &= \\ &= (35 - 8) \times 10 = \\ &= 270 \\ \text{Relacionando as duas diferenças:} \\ 350 - 80 &= (347 + 3) - (78 + 2) = \\ &= 347 - 78 + 3 - 2 = (347 - 78) + (3 - 2) = \\ &= (347 - 78) + 1 \\ \text{Portanto,} \\ 347 - 78 &= (350 - 80) - 1 = \\ &= 270 - 1 = 269\end{aligned}$$

E.2. Adicionar 2 ao subtrativo e subtrair 7 ao aditivo

$$\begin{aligned}340 - 80 &= \\ &= 260 \\ \text{Relacionando as duas diferenças:} \\ 340 - 80 &= (347 - 7) - (78 + 2) = (347 - 78) - 7 - 2 = 269 - 9, \\ \text{Portanto,} \\ 347 - 78 &= (340 - 80) + 7 + 2 = \\ &= 260 + 9 = 269\end{aligned}$$

¹Complemento Aritmético de um número natural N, é o número que a ele adicionado soma a potência de 10 imediatamente superior a N.

como ilustramos na No processo B efetuou-se a substituição do subtrativo, 78, pela diferença $100 - 22$. Como 78 e 22 somam 100, designam-se complemento aritmético um do outro. A escolha de 100 é explicada pela conveniência de cálculo da diferença. Com o recurso ao número complementar para 100, evitou-se a ocorrência das diferenças negativas, -30 e -1, apresentadas em A.1. figura 1.

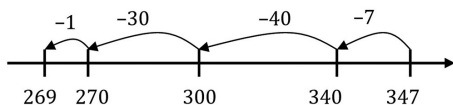


Figura 1

No processo B efetuou-se a substituição do subtrativo, 78, pela diferença $100 - 22$. Como 78 e 22 somam 100, designam-se complemento aritmético um do outro. A escolha de 100 é explicada pela conveniência de cálculo da diferença. Com o recurso ao número complementar para 100, evitou-se a ocorrência das diferenças negativas, -30 e -1, apresentadas em A.1.

No processo C (C.1 e C.2) privilegiou-se, em ambos os casos, a invariância de um termo e a variação do outro termo.

Em C.1 o aditivo variou e o subtrativo, 78, manteve-se. Ao adicionar 31 ao aditivo 347, obteve-se 378, cujos algarismos na posição das unidades e das dezenas são iguais aos correspondentes no subtrativo, permitindo obter a diferença $378 - 78$, que é um múltiplo de 10. Esta diferença não é a diferença pretendida, há que anular o aumento efetuado no aditivo para poder ser mantida a invariância da diferença procurada. À luz de que propriedades ou relações se pode proceder assim? A soma de números simétricos ser nula e a propriedade comutativa da adição, no conjunto dos números inteiros relativos², fundamentam os procedimentos realizados, respondendo assim, à pergunta atrás formulada. Podemos escrever $(347 + 31 - 31) - 78 = 378 - 78 - 31$ (figura 2). Esta igualdade expressa que a diferença procurada, $347 - 78$, resultou de se ter retirado 31 à diferença obtida por acréscimo de 31 ao aditivo inicial, mantendo invariante o subtrativo.

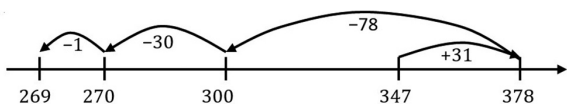


Figura 2

A representação visual da sequência de procedimentos adotados, permite também dar sentido à afirmação: Quando o aditivo aumenta e o subtrativo se mantém, a diferença correspondente aumenta tanto quanto aumentou o aditivo.

No caso C.2 variou o subtrativo e manteve-se o aditivo, 347. Subtraiu-se 31 ao subtrativo, para que, tal como em C.1, fosse obtido um múltiplo de 10, a diferença $347 - 47$. Compreende-se que esta diferença é necessariamente maior

que a pretendida, pelo facto de o subtrativo ter diminuído, ficando mais distante do aditivo (que se manteve). Então, a diferença procurada tem de ser inferior, tanto quanto diminuiu o subtrativo, isto é, há que determinar $300 - 31$. Estas relações podem ser traduzidas pelas igualdades

$$347 - 78 = 347 - (78 - 31 + 31) = 347 - (47 + 31) = 347 - 47 - 31.$$

Os procedimentos aqui adotados são sustentados por ser nula a soma de números simétricos e pela propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição.

Estes dois casos, de invariância de um dos termos da subtração, mostram que a diferença procurada se obtém de modo diferente, dependendo do termo em que houve variação.

Observemos os processos de ajustamento feitos de modo a manter a invariância da diferença entre 347 e 78, nos dois casos C.1 e C.2. Em ambos os casos aumentou a diferença obtida entre o termo que variou e o que se manteve; contudo este aumento foi provocado por variações de sentidos opostos, isto é, por aumento do aditivo e por diminuição do subtrativo. Em C.1, o aditivo aumentou 31; teve de ser retirado 31 para obter a diferença procurada. Em C.2, o subtrativo diminuiu 31; teve de ser retirado 31 para obter a diferença procurada.

É habitual encontrar na literatura o termo “compensação” para descrever os procedimentos adoptados nestes casos. Utilizar a mesma palavra para descrever e explicar procedimentos diferentes é ambíguo. É possível, usando as expressões³ “adicionar o valor simétrico” quando o aditivo aumenta, “adicionar o mesmo valor” quando o subtrativo diminui, ser não só claro, como valorizar a distinção entre a variação ser no aditivo ou no subtrativo.

Passemos aos casos em que existe variação em ambos os termos operatórios.

Nos processos D.1 e D.2 estamos perante a variação de ambos os termos operatórios. No processo D.1 exemplificamos a invariância da diferença, adicionando o mesmo número, 2, a ambos os termos. A mesma propriedade poderia sustentar uma diminuição do mesmo valor em ambos os termos, como mostramos em D.2, em que se subtraiu 8 a ambos os termos. Esta mesma propriedade, da invariância da diferença, pode ser invocada na justificação de todos os casos em que há variação de um dos termos ou de ambos.

No processo E.1, exemplificamos variações em ambos os termos, no mesmo sentido e com valores diferentes, adicionando 3 no aditivo e 2 no subtrativo. Observemos que à diferença $(347 + 3) - (78 + 2)$ corresponde, pela invariância, adicionar 2 a ambos os termos:

$$\begin{aligned} 347 - 78 &= (347 + 3 - 3) - (78 + 2 - 2) = \\ &= 347 + 3 - 3 - 78 - 2 + 2 = 347 + 2 - 78 - 2 = (347 + 2) - (78 + 2) \end{aligned}$$

No processo E.2, exemplificamos variações em ambos os termos, em sentidos opostos e com valores diferentes, adicionando 2 no subtrativo e subtraindo 7 ao aditivo. A invariância da diferença

²O conjunto dos números inteiros relativos, Z , pode ser encarado como a reunião do conjunto dos números naturais, N , com o conjunto dos simétricos destes números e com o conjunto unitário cujo elemento é 0.

³Estas mesmas expressões poderão ser também utilizadas na adição.

pode reconhecer-se também neste caso, subtraindo 7 a ambos os termos, porque é verdade que

$$347 - 78 = (347 - 7 + 7) - (78 + 2 - 2) =$$

$$= 347 - 7 + 7 - 78 - 2 + 2 = (347 - 7) - (78 - 7) = 340 - 71$$

Após discussão de cada um dos processos apresentados na tabela 1 vamos realçar alguns aspetos importantes do ponto de vista da organização dos processos de cálculo. Existem duas grandes categorias definidas pela variação, ou não, de termo(s) da operação. Nos casos A e B, não houve variação de nenhum dos termos. Em todos os outros casos ocorreu sempre variação de um ou de ambos os termos operatórios.

O processo A é relativo a decomposições, sem variações dos termos, sendo A.1 focado na decomposição decimal de ambos os termos e A.2 na decomposição aditiva (decimal ou não decimal) do subtrativo. No processo B recorreremos ao complemento aritmético, 22, relativamente a 100, do subtrativo, 78, tendo substituído este, por $100 - 22$.

Todos os processos seguintes incidem em variações, ou de um dos termos ou de ambos. Nestes casos, a invariância da diferença tem de ser garantida. Importa assim mostrar como. No processo D, esta invariância foi garantida, graças ao facto de em ambos os termos se ter adicionado, ou subtraído, o mesmo número a cada um dos termos. O processo C.1, rapidamente se transforma no processo D, bastando para isto notar que $347 - 78 = (347 + 31) - (78 + 31)$; identicamente em C2, notando que $347 - 78 = (347 - 31) - (78 - 31)$. Também no processo E mostrámos como a invariância da diferença foi garantida.

Na tabela 2 apresentamos as estratégias e processos de cálculo de diferenças ilustrados anteriormente, neste artigo e no que o precedeu (identificado no início).

Tabela 2. Categorização das estratégias e processos de cálculo de diferenças.

	Estratégia	Processo	Procedimento	
Cálculo de Diferença	Contagem	Regressiva		
		Progressiva (Adding Up)		
	Não algorítmica	UM termo	Aditivo	
			Subtrativo	
		DOIS termos	Mesmo sentido	Valor igual (invariância da diferença)
			Sentido oposto	Valor diferente
	Decomposição de	UM termo	Salto (N10)	
		DOIS termos	Não decimal	
			Decimal (1010)	
		Complemento aritmético do subtrativo		
	Algorítmica			

GENERALIZAÇÃO NO CONJUNTO Z - VARIAÇÃO DOS TERMOS DA SUBTRAÇÃO

A variação de termos, no caso geral de uma subtração, vai seguidamente ser caracterizada e fundamentada, começando pela generalização da variação de um dos termos e invariância do outro, seguida da variação de ambos os termos e consequências na variação das diferenças.

Consideramos as variáveis que assumem valores no conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$:

- A para aditivo,
- S para subtrativo,
- I, I₁ e I₂ para incrementos.

VARIAÇÃO DE UM DOS TERMOS E INVARIÂNCIA DO OUTRO TERMO

Pode afirmar-se que quando se pretende determinar a diferença entre o aditivo A, e o subtrativo S:

- i) mantendo-se o subtrativo,
 - a. se o aditivo aumenta I, a diferença correspondente aumenta I e, portanto, há que subtrair I a esta diferença para obter a pretendida, $A - S$.
 - b. se o aditivo diminuiu I, a diferença correspondente diminuiu I e, portanto, há que adicionar I a esta diferença para obter a pretendida, $A - S$.

A generalização expressa por estes dois casos pode, em síntese, ser assim formulada: mantendo-se o subtrativo, há que adicionar à diferença alterada o simétrico do que se adicionou ao aditivo.

- ii) mantendo-se o aditivo,
 - a. se o subtrativo aumenta I, a diferença correspondente diminui I e, portanto, para obter a diferença pretendida há que adicionar I à diferença alterada.
 - b. se o subtrativo diminui I, a diferença correspondente aumenta I e, portanto, para obter a diferença pretendida há que subtrair I à diferença alterada.

A generalização expressa por estes dois casos pode, em síntese, ser assim formulada: mantendo-se o aditivo, é necessário adicionar ou subtrair à diferença alterada o mesmo que se adicionou ou subtraiu ao subtrativo.

Em notação simbólica, usando as variáveis que assumem valores no conjunto dos números naturais, vem, respetivamente:

- i) Mantendo o subtrativo
 - a. $(A + I) - S = A - S + I = (A - S) + I$; portanto $A - S = ((A + I) - S) - I$;
 - b. $(A - I) - S = A - S - I = (A - S) - I$; portanto $A - S = ((A - I) - S) + I$
- ii) mantendo o aditivo
 - a. $A - (S + I) = A - S - I = (A - S) - I$; portanto $A - S = (A - (S + I)) + I$;
 - b. $A - (S - I) = A - S + I = (A - S) + I$; portanto $A - S = (A - (S - I)) - I$

A representação visual na Figura 3 é bem clara quanto à variação da diferença, no caso em que o subtrativo é invariante e o aditivo varia I.

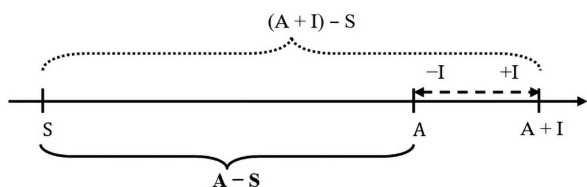


Figura 3

Na Figura 4 ilustra-se o caso em que o subtrativo varia mantendo-se invariante o aditivo.

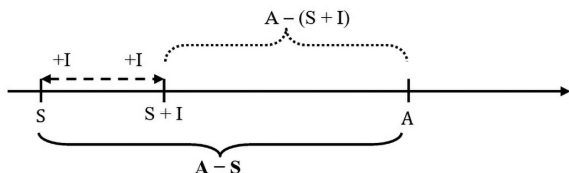


Figura 4

Passemos à generalização dos casos em que o aditivo e o subtrativo se alteram simultaneamente.⁴

VARIAÇÃO DOS DOIS TERMOS EM SENTIDOS OPOSTOS

Pode afirmar-se que quando se pretende determinar a diferença $A - S$:

- i) Se o aditivo aumenta I_1 e o subtrativo diminui I_2 , a diferença correspondente aumenta $I_1 + I_2$ que é a soma dos incrementos dos termos;
- ii) Se o aditivo diminui I_1 e o subtrativo aumenta I_2 , a diferença correspondente diminui $I_1 + I_2$ que é a soma dos incrementos dos termos.

Em notação simbólica, usando as variáveis, A, para aditivo, S para subtrativo e I_1 e I_2 , para os incrementos, vem, respetivamente:

- i) $(A + I_1) - (S - I_2) = A + I_1 - S + I_2 = (A - S) + I_1 + I_2$;
portanto,
 $A - S = (A + I_1) - (S - I_2) - I_1 - I_2 =$
 $= (A + I_1) - (S - I_2) - (I_1 + I_2)$
- ii) $(A - I_1) - (S + I_2) = A - I_1 - S - I_2 = (A - S) - (I_1 + I_2)$;
portanto,
 $A - S = (A - I_1) - (S + I_2) + (I_1 + I_2)$

VARIAÇÃO DOS DOIS TERMOS NO MESMO SENTIDO

Chegados à última secção deste artigo, recordemos que as variáveis A, S, I_1 e I_2 assumem valores no conjunto dos números naturais. Vamos exprimir as generalizações relativas à variação dos termos A, aditivo, e S, subtrativo, no mesmo sentido e as relações respetivas com as variações das diferenças, a pretendida e a alterada.

⁴O caso em que ambos os termos alteram o mesmo valor no mesmo sentido não é aqui considerado uma vez que corresponde à invariância da diferença.

As variações, no mesmo sentido, dos dois termos, podem ser expressas simbolicamente por:

- ambos os termos aumentam, $(A + I_1) - (S + I_2)$
- ambos os termos diminuem, $(A - I_1) - (S - I_2)$

Relacionemos estas diferenças, pela mesma ordem que seguimos no parágrafo anterior.

Ambos os termos aumentam

$$(A + I_1) - (S + I_2) = A + I_1 - S - I_2 = A - S + (I_1 - I_2),$$

Designando por **d** a diferença alterada $(A + I_1) - (S + I_2)$, a diferença pretendida, $A - S$, virá assim expressa

$$A - S = d - (I_1 - I_2).$$

Como apresentamos na tabela 3, três situações podem ocorrer considerando a relação de ordem entre I_1 e I_2 .

Tabela 3

Relação entre I_1 e I_2	Valor relativo de $I_1 - I_2$	Relação entre $A - S$ e d
$I_1 < I_2$	$I_1 - I_2 < 0$	$A - S = d - I_1 + I_2 = d + (I_2 - I_1)$ $A - S > d$
$I_1 = I_2$	$I_1 - I_2 = 0$	$A - S = (A + I) - (S + I)$ $A - S = d$ INVARIÂNCIA DA DIFERENÇA
$I_1 > I_2$	$I_1 - I_2 > 0$	$A - S = d + I_1 - I_2 = d + (I_1 - I_2)$ $A - S > d$

Podemos traduzir por palavras a relação entre a diferença **d** e a diferença pretendida $A - S$, deste modo:

- A invariância da diferença aparece, como seria de esperar, no caso em que são iguais ambos os incrementos I_1 e I_2 .
- As outras duas situações têm o mesmo significado, isto é, se ambos os termos aumentam, embora a partir de diferentes incrementos, a correspondente diferença diminui a diferença entre os incrementos.
- A diferença pretendida, $A - S$, aumenta e tem de se obter pela adição da diferença dos incrementos à diferença alterada **d**.

Ambos os termos diminuem

$$(A - I_1) - (S - I_2) = A - I_1 - S + I_2 = A - S - (I_1 - I_2) =$$

$$= A - S + (I_2 - I_1)$$

Designando por **d** a diferença $(A - I_1) - (S - I_2)$, a diferença pretendida, $A - S$, virá assim expressa $A - S = d - (I_2 - I_1)$ ou $A - S = d + (I_1 - I_2)$

Como apresentamos na tabela 4, três situações podem ocorrer considerando a relação de ordem entre I_1 e I_2

Tabela 4

Relação entre I_1 e I_2	Valor relativo de $I_1 - I_2$	Relação entre $A - S$ e d
$I_1 < I_2$	$I_1 - I_2 < 0$	$A - S = d - I_2 + I_1 = d - (I_2 - I_1)$ $A - S < d$
$I_1 = I_2$	$I_1 - I_2 = 0$	$A - S = (A - I_1) - (S - I_1)$ $A - S = d$ INVARIÂNCIA DA DIFERENÇA
$I_1 > I_2$	$I_1 - I_2 > 0$	$A - S = d + I_1 - I_2 = d + (I_1 - I_2)$ $A - S > d$

Podemos traduzir por palavras a relação entre a diferença d e a diferença pretendida $A - S$, deste modo:

- A invariância da diferença aparece, como seria de esperar, no caso em que são iguais ambos os incrementos I_1 e I_2 .
- Nas outras duas situações há que considerar se o incremento maior se dá no subtrativo ou no aditivo. No primeiro caso, em que $I_1 < I_2$ a correspondente diferença, d , aumenta a diferença entre os incrementos, $I_2 - I_1$. A diferença pretendida, $A - S$ tem de se obter pela diferença entre d e $I_2 - I_1$. Quando o maior incremento ocorre no aditivo, caso em que $I_1 > I_2$, a diferença pretendida obtém-se subtraindo $I_1 - I_2$ a d .

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como afirmámos no início, este artigo é destinado à formação inicial e contínua de professores do 1º e do 2º Ciclos, incidindo na vertente do conhecimento da e sobre a Matemática. Na linha do argumentado por Ball et al (2008) entendemos que o conteúdo do artigo se insere na especificidade deste conhecimento, para o qual, no que diz respeito ao cálculo aritmético nos primeiros anos de escolaridade, destacamos três aspetos: o conhecimento dos diversos processos, a compreensão das propriedades operatórias que os fundamentam e a comunicação matemática inerente.

No que respeita à comunicação matemática destacamos as representações não exclusivamente simbólicas que lhes podem ser associadas e que dão visibilidade ao processo - representações ativas, icónicas, diagramas em árvore, linha numérica (à qual damos especial destaque) – e a escrita das expressões numéricas que explicitam cada processo. Esta escrita é não só acessível compreensivamente, no âmbito da formação inicial ou contínua de professores, como permite comunicar com clareza e rigor os diversos procedimentos realizados.

A experiência diz-nos que é importante dar valor à representação simbólica para se compreender como se justificam matematicamente as variações das diferenças em função das variações dos termos. Consequentemente, essa representação dá sentido e enquadra mais positivamente a compreensão das propriedades operatórias. Dentro deste aspeto, sugerimos que não se utilize o termo “compensação” para referir ajustes à invariância do resultado operatório. Há designações matemáticas que fundamentam esses ajustes.

A valorização da fundamentação matemática também se justifica por promover uma compreensão processual ao invés dos procedimentos de cálculo algorítmico de compreensão muito mais complexa. Também não nos parece pertinente o ensino dos algoritmos nos primeiros anos, dado o papel do ensino e da aprendizagem em pleno século XXI.

Privilegiamos também a pluralidade de processos de cálculo, aspeto importante do ponto de vista didático, tendo presente o princípio ativo da aprendizagem; esta diversidade, não deve, contudo, travar a discussão em sala de aula, em momentos adequados, do poder matemático dos diferentes processos. Estamos a referir-nos à abrangência, ou seja, à possibilidade de alguns dos processos poderem ser de aplicação a um leque alargado de números.

O conhecimento dos diferentes processos de cálculo é fundamental para a orientação dos alunos. Merecem destaque os seguintes aspetos relativos à obtenção de diferenças:

- A decisão quanto ao(s) processo(s) a utilizar deve ter em atenção a relação entre os termos operatórios. Por exemplo, se os dois termos forem próximos, poderá ser determinada a diferença por processo diferente dos casos em que são distantes um do outro.
- É facilitador do cálculo que o subtrativo seja um múltiplo de 10, especificamente, uma potência de 10 de expoente natural. Esta potencialidade tem de ser reconhecida na experiência de um percurso de aprendizagem de estratégias diversificadas.
- A adição ou subtração do mesmo valor a ambos os termos operatórios – garante da invariância do resultado – é um procedimento muito potente.

Finalmente sublinhamos que a compreensão de qualquer operação não se reduz ao domínio do cálculo. Requer também a resolução de situações problemáticas associadas a diferentes contextos e aos sentidos operatórios neles manifestados.

Referências Bibliográficas

- Beishuizen, M. (1993). Mental Strategies and materials or models for Addition and Subtraction up to 100 in Dutch Second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(4), 294 – 323
- Baroody, A. J. (2016). Curricular approaches to connecting subtraction to addition and fostering fluency with Basic differences in grade 1. *PNA*, 10(3), 161-190
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*. 59(5), 389-407

GRACIOSA VELOSO

PEDRO ALMEIDA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA