

Desterritorialização didática de erros relacionados com $(x+y)^2$

MISLEINE ANDRADE FERREIRA PEEL

PATRÍCIA DAMAS BEITES

MARIA DE FÁTIMA DE JESUS SIMÕES

Será que $(x+y)^2=x^2+y^2$ representa um erro? A resposta, sim ou não, depende do universo matemático em que se esteja a trabalhar. Com efeito, é um erro se, por exemplo, x e y forem números complexos arbitrários e “+” denotar a adição usual de números complexos. Mas não é um erro, e trata-se de uma identidade satisfeita, por exemplo, no contexto do semianel min-mais $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, +, \cdot)$, em que “+” denotaria a adição tropical (Beites & Nicolás, 2016).

Considerando o corpo dos números complexos, construímos algumas tarefas para a sala de aula que se baseiam em erros, relacionados com o desenvolvimento da expressão $(x+y)^2$ e identificados em produções de estudantes para uma tarefa de demonstração (Beites et al., 2021). Adotamos uma perspetiva construtiva do processo de ensino-aprendizagem, propondo a desterritorialização didática desses erros através de um olhar afetivo-positivo (Peel et al., 2020).

O POTENCIAL CRIATIVO DO ERRO

Muitos estudiosos da educação tentam simplificar o processo de ensino e de aprendizagem buscando uma didática generalizante para todas as áreas e para todos os estudantes. Kastrup (2001) relata que, ao longo da história da psicologia, o problema da aprendizagem geralmente é colocado objetivando o estabelecimento de leis para a aprendizagem, o que para a autora demonstra um caráter limitado desse tipo de estudo, pois essa perspetiva descarta a subjetividade dos sujeitos e dissocia a invenção do processo de aprendizagem; isso mostra uma visão homogénea dos sujeitos, como se todos fossem, nesse aspeto, iguais. O ensino por muito tempo foi compreendido como uma ação de transmissão dos conteúdos historicamente construídos; e o aprender, como uma aquisição passiva de conteúdos. E esse processo deveria ocorrer automaticamente, quase como um silogismo aristotélico: toda a aprendizagem é derivada do ensino; os sujeitos aprendem; logo, os sujeitos foram ensinados.

No entanto, a partir dos anos 50 do século passado, a subjetividade passou a ser considerada um fator fundamental para a aprendizagem, uma vez que “...os processos mentais, mediadores de pleno direito entre o contexto e (...) o comportamento.” (Simões, 2000, p.13) passam a ser tidos em conta. Com efeito, o indivíduo é dotado de uma subjetividade constituída por um conjunto de processos cognitivos ou ações

mentais com vista à obtenção de resultados ou produtos cognitivos sob forma de aprendizagem (Simões, 2000). Assim, desde essa época, a aprendizagem tem vindo a ser concebida em termos de construção ativa de conhecimento e significado das experiências do quotidiano em que o ensino promova uma educação de qualidade (Soares & Almeida, 2015). Nós entendemos que ensinar não é transferir conhecimentos, nem representar, nem seguir o modelo da recongnição; ficamos com o entendimento da filosofia deleuziana, expresso por Kastrup (2001): “a aprendizagem é, sobretudo, invenção de problemas, é experiência de problematização” (p.17).

O ensino é experiência, experimentação; e neste processo os erros são bem comuns, sabemos que ainda existe um estereótipo negativo do erro no ambiente educacional: o erro é geralmente associado a uma série de afetos negativos como constrangimento, medo, tristeza, frustração, dentre outros; além disso, ele pode gerar consequências ruins, como reprovações e até mesmo humilhações públicas. Entendemos que toda essa situação pode atrapalhar o desenvolvimento cognitivo e emocional dos sujeitos (Rosário et al., 2004; Simões, 2001); compreendemos que este estereótipo acaba por se revelar como um território. O conceito de território que utilizamos aqui é o trabalhado por Deleuze e Guattari (1995), um lugar de hábitos e ritmos, de encontros e agenciamento, que não deve ter limites restritos, mas sempre abertos com linhas de fugas para uma desterritorialização e uma consequente reterritorialização.

Vemos, especialmente no ensino escolar da matemática, que existe um grande número de estudantes que fracassam na aprendizagem desta ciência, por isso nos propomos a pensar nos aspectos didáticos do erro, promovendo sua desterritorialização negativa, entendendo-o como parte do processo, como meio e não como um fim em si mesmo (Astolfi, 1999; Cury, 2012; Peng & Luo, 2009; Spinillo et al., 2014; Torre, 2007). É importante entendermos que o erro faz parte do processo de aprendizagem, como uma errância, e que, mais importante do que ser avisado de seu erro, é a sua percepção como caminho a ser trilhado, ou como desvio a ser feito, ou refeito; enfim, é preciso perceber como desabitar positivamente o território do erro.

Aprender é ser forçado a pensar, e pensar é experimentar, é estabelecer encontros; os encontros forçam o pensamento.

Entendemos que o ensino e a aprendizagem são acontecimentos, sendo o acontecimento conceituado por Deleuze e Parnet (1998) como algo múltiplo, o que foi assim indicado pelos autores:

Uma multiplicidade que comporta muitos termos heterogêneos, e que estabelece ligações, relações entre eles, através das épocas, dos sexos, dos reinos – naturezas diferentes. Por isso a única unidade do agenciamento é de co-funcionamento: é uma simbiose, uma “simpatia. O que é importante não são nunca as filiações, mas as alianças e as ligas, não são os hereditários, os descendentes, mas os contágios, as epidemias, o vento” (p. 83).

O processo de ensino e de aprendizagem é múltiplo e complexo; é coletivo, é plural, é singular, é subjetivo, é marcado por encontros e por afetos; é, segundo Deleuze (2000), decifração de signos e criação. Aprender é experimentar e neste processo acontecem erros; isso de nenhuma forma significa negar o erro, mas naturalizá-lo no processo de ensino e de aprendizagem, esmiuçá-lo, analisá-lo e, por fim, desterritorializá-lo, fazendo-o atuar como um dispositivo, gerando uma potência criativa para agir e existir, tanto para os professores quanto para os estudantes. Assim, o erro será percebido como parte desse processo e tornar-se-á um dispositivo para a criação; Kastrup (2001) usa o termo errância, em uma analogia do aprender enquanto caminho e a errância como parte do processo:

Quando viajamos somos forçados a conviver com uma certa errância, a perder tempo, a explorar o meio com olhos atentos aos signos e a penetrar em semióticas novas. Somos forçados a pensar, a aprender e a construir um novo domínio cognitivo e uma outra maneira de realizar atividades que eram tão simples e corriqueiras, das quais havíamos esquecido seu caráter inventado (p. 17).

Percebemos, então, que esse território estereotipado do erro precisa, urgentemente, de ser desterritorializado. Cury (2007) afirma que “se os futuros professores têm concepções negativas sobre o erro, se não aceitam sua ocorrência, como poderão ajudar seus alunos a superar o sentimento negativo em relação aos erros?” (p. 93). A desterritorialização do erro é necessária para que, de facto, aconteça a aprendizagem como reterritorialização; a aprendizagem é uma experimentação imanente, transformadora, libertadora e criativa – essencial para uma formação holística dos sujeitos.

TAREFAS PARA A SALA DE AULA

Como defende Pinto (1998), e muitos outros educadores e investigadores em educação matemática, o erro possui um precioso valor pedagógico e pode ser aproveitado para uma estratégia didática (Beites, Peel, & Costa, 2021). Esta, após o erro ser observável para o professor, visa tornar o erro observável para o estudante.

O termo observável, com a ideia de construção subjacente, diz respeito à tomada de consciência do erro. Concretamente para o estudante, observável “não no sentido de derrota, mas tomado como elemento constitutivo da gênese de todo conhecimento”

(Pinto, 1998, p. 36), desequilibrando estruturas mentais até superar o erro.

No sentido referido, o papel do professor consiste em desterritorializar didaticamente o erro, criando estratégias didáticas a partir do erro, para promover a aprendizagem. Com efeito, o erro tem um potencial criativo, mas a criatividade reside “nas pessoas que são capazes de gerar novas ideias apoiando-se nele” (Torre, 2007, p. 15).

O estudante pode participar na desterritorialização e eventual reterritorialização do erro, provocada(s) pela estratégia didática do professor ou pela sua própria ação ao aperceber-se autonomamente do erro. Ambos os papéis possíveis do estudante podem conduzi-lo à (auto)regulação (Guimarães, 2016; Rosário et al., 2004).

A primeira proposta de tarefa é uma questão conceptual (figura 1), num domínio de conteúdo do ensino secundário – Números Complexos, adequada para integrar a implementação da aprendizagem pelos pares (Beites & Romano, 2014) e, em particular, promover a discussão entre pares (estudantes).

Um exemplo de uma proposição verdadeira é

- a) $\forall z, w \in \mathbb{C}, (z + w)^2 = z^2 + w^2$
- b) $\forall z, w \in \mathbb{C}, (z + w)^2 = 2(z + w)$
- c) $\forall z, w \in \mathbb{C}, (z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$
- d) nenhuma das opções anteriores

Figura 1. Proposta de uma tarefa envolvendo o conceito de quadrado da soma de dois números complexos.

A proposta na figura 2 tem múltiplas soluções, tipo de tarefa que envolve pensamento divergente e está associada à promoção da criatividade (Carlos, 2016). Exemplos de respostas finais possíveis são, para

- a), $\forall z, w \in \mathbb{C}, (zw)^2 = z^2w^2$ e $\forall z \in \mathbb{C}, \forall w \in \{0\}, (z + w)^2 = z^2 + w^2$,
- c, para b), $\forall (z, w) \in \{(z, w) \in \mathbb{C}^2: z + w = 2\}, (z + w)^2 = 2(z + w)$ e
- $\forall z, w \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \log_b(z + w)^2 = 2\log_b(z + w)$.

Considere a tarefa anterior. Altere, de todas as formas que lhe ocorram, as opções incorretas de modo a obter proposições verdadeiras. Fundamente a sua resposta.

Figura 2. Proposta de uma tarefa complementar à da Fig. 1.

A proposta de tarefa na figura 3 é um exemplo erróneo (Rushton, 2018), tipo de tarefa que também pode ser utilizado para despoletar momentos de discussão entre pares (estudantes), em pequeno e em grande grupo, e com o professor nas aulas. Neste caso incorpora os erros que levaram à tarefa na figura 1.

Considere a tarefa e a resolução subsequentes. Identifique todos os erros cometidos na resolução e corrija-os.

Tarefa
Sejam $z, w \in \mathbb{C}$, quaisquer. Simplifique, o mais possível, a expressão $(z + w)^2 + (z - w)^2$.

Resolução
Sejam $z, w \in \mathbb{C}$, quaisquer. Tem-se $(z + w)^2 = z^2 + w^2$ e $(z - w)^2 = z^2 - w^2$. Então $(z + w)^2 + (z - w)^2 = 2z^2 = 4z^2$.

Figura 3. Proposta de uma tarefa envolvendo os conceitos de quadrado de um número complexo e de quadrado da soma de dois números complexos.

Terminamos com a proposta de tarefa na figura 4, em que, para não responder a b) de forma trivial ($\{0\}$), se pode utilizar um conceito lecionado na área de álgebra do ensino superior – característica de um corpo (Hungerford, 1974). Exemplos de respostas finais possíveis são \mathbb{C} , para a), e F , corpo de característica 2, para b).

<p>Considere</p> $\forall x, y \in \dots, (x + y)^2 = x^2 + y^2.$ <p>Preencha o ponteadado de modo a obter uma proposição:</p> <p>a) falsa; b) verdadeira.</p> <p>Apresente o raciocínio que motivou o preenchimento.</p>

Figura 4. Proposta de uma tarefa envolvendo o conceito de universo matemático.

CONSIDERAÇÕES EM TEMPOS DE PANDEMIA

O ano de 2020, marcado pela pandemia COVID-19, implicou uma urgência de mudanças na sala de aula como a conhecíamos. O espaço físico associado à sala de aula foi substituído por um espaço virtual, com retorno ao primeiro sempre que possível mas, ainda assim, pontuado por episódios híbridos em que os dois espaços acabam por coexistir, quando necessário, em simultâneo.

Algumas das propostas que apresentámos usufruíam, em contexto pré-pandémico, da proximidade que se pode ter no processo de ensino-aprendizagem presencial. Exemplo disso é a discussão entre pares (estudantes), fisicamente próximos nos locais em que estão sentados, despoletada por uma questão conceptual. Também o professor assumia um papel de mediador da discussão ao circular entre estudantes.

A presente impossibilidade de implementação usual leva a adaptações que visam proximidade com distância física. Neste sentido, as tecnologias digitais podem esbater essa barreira nos espaços físico, virtual e na interface dos dois com alternativas como: chat do Moodle; criação de salas simultâneas no Zoom para discussão em pequeno grupo de estudantes, que estão ou não no mesmo local físico; e tantas outras!

Agradecimentos

P. D. Beites foi parcialmente financiada pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, projeto UIDB/00212/2020 do CMA-UBI (Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior). As autoras agradecem a revisão que permitiu melhorar o trabalho.

Referências

Astolfi, J. P. (1999). *El "error": un medio para enseñar*. Díada.

Beites, P. D., Branco, M. L., & Costa, C. (2021). Erros em esquemas de demonstração com números complexos. *Educação e Pesquisa*, 47, aceite para publicação.

Beites, P. D., & Nicolás, A. P. (2016). A identidade tropical $(x+y)^2 = x^2 + y^2$. *Gazeta de Matemática*, (180), 18-21.

Beites, P. D., Peel, M. A. F., & Costa, C. (2021). *Desenho de tarefas baseado em erros com números complexos*, submetido.

Beites, P. D., & Romano, A. (2014). Nestas aulas é melhor falar do que estar calado!. *Educação e Matemática*, 129, 13-16.

Carlos, F. (2016). *Excelência e criatividade em matemática universitária*. Tese de Doutoramento em Educação. Universidade da Beira Interior.

Cury, H. N. (2007). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Autêntica.

Cury, H. N. (2012). O conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros. In H. N. Cury & C. R. Vianna (Orgs.), *Formação do professor de matemática: reflexões e propostas* (pp.19-48). IPR.

Deleuze, G. (2000). *Diferença e Repetição*. Relógio D'Água.

Deleuze, G., & Guattari, F. (1995). *Mil platôs: Capitalismo e esquizofrenia*. 34.

Deleuze, G., & Parnet, C. (1998). *Diálogos*. Escuta.

Guimarães, S. C. M. (2016). *Estudar e aprender no Ensino Superior*. Tese de Doutoramento em Educação. Universidade da Beira Interior.

Hungerford, T. W. (1974). *Algebra*. Springer.

Kastrup, V. (2001). Aprendizagem, arte e invenção. *Psicologia em Estudo*, 6(1), 17-27.

Peel, M. A. F., Beites, P. D., & Oliveira, L. R. P. F. de (2020). O errar na aprendizagem da Língua Portuguesa. *Revista Philologus*, 26(78 Supl. Rio de Janeiro: CiFEFIL), 2309-2323.

Peng, A., & Luo, Z. (2009). A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. *For the Learning of Mathematics*, 29(3), 22-25.

Pinto, N. B. (1998). *O Erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar*. Tese de Doutorado em Educação. Universidade de São Paulo, Brasil.

Rosário, P., Soares, S., Núñez, J. C., González-Pienda, J., & Simões, F. (2004). Ansiedade face aos testes e autorregulação da aprendizagem: variáveis emocionais do aprender. *Psicologia e Educação*, 3(1), 15-26.

Rushton, S. (2018). Teaching and learning mathematics through error analysis. *Fields Mathematics Education*, 3(4), 1-12.

Simões, F. (2000). *Cognição e aprendizagem de conceitos-chave da Física*. Instituto de Inovação Educacional (IIE).

Simões, F. (2001). Relações interpersoais: perspectivas e fundamentos. *Brotéria*, 152(2), 147-157.

Soares, D. L., & Almeida, L. S. (2015). (In)sucesso escolar na adolescência: a convergência de variáveis pessoais e contextuais. In G. C. Lemos & L. S. Almeida (Eds.), *Cognição e Aprendizagem: Promoção do sucesso escolar* (pp. 110-137). ADIPSIEDUC.

Spinillo, A. G., Pacheco, A. B., Gomes, J. F., & Cavalcanti, L. (2014). O erro no processo de ensino-aprendizagem da Matemática: errar é preciso? *Boletim GEPEM*, (64), 57-70.

Torre, S. de la (2007). *Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança*. Artmed.

MISLEINE ANDRADE FERREIRA PEEL

INSTITUTO FEDERAL DO TOCANTINS (ARAGUAÍNA, BRASIL); DOUTORANDA NO DOUTORAMENTO EM EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

PATRÍCIA DAMAS BEITES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E CENTRO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES, UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

MARIA DE FÁTIMA DE JESUS SIMÕES

DEPARTAMENTO DE PSICOLOGIA E EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR, E CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO E PSICOLOGIA, UNIVERSIDADE DE ÉVORA