Teremos Triângulo?

José Paulo Viana

Problema:

> *Temos uma vara muito fina com um metro de comprimento. Partimos a vara por dois pontos aleatoriamente sorteados. Qual é a probabilidade de ser possível construir um triângulo com os três pedaços de vara?*

Antes de começar, notemos que estamos a admitir implicitamente que todos os pontos da vara têm igual possibilidade de serem escolhidos, ou seja, que não há pontos preferenciais por onde a vara será partida.

Numa primeira análise, o problema não parece fácil de resolver. Temos duas variáveis (as posições dos dois pontos) cada uma delas com uma infinidade de casos possíveis. No entanto, como veremos, a atual tecnologia disponível pode ser muito útil e permitirá ultrapassar esta dificuldade. E depois, até podemos ir mais longe.

Vamos usar o método de Monte Carlo, fazendo muitas simulações da situação em análise. Não iremos partir muitas varas, mas sim arranjar um processo fácil e rápido de imitar a vara a ser partida. Se cada experiência for equivalente à situação real e tivermos um registo do que aconteceu em cada caso (foi possível construir o triângulo ou não), após "muitas" experiências a frequência relativa dos casos favoráveis estará "próxima" da probabilidade procurada. Mais à frente veremos melhor o que significam aqui as palavras "muitas" e "próxima".

1.º MÉTODO – MONTE CARLO

A grande vantagem da tecnologia é ser possível fazer simulações rapidamente e em grande quantidade, imitando o acaso e reproduzindo a realidade. Iremos usar aqui a TI-Nspire mas, evidentemente, tudo poderá ser feito usando outros programas ou calculadoras equivalentes.

Em cada experiência a fazer, há os seguintes passos a cumprir:

1. Escolher aleatoriamente os dois pontos.
2. Determinar os comprimentos dos três pedaços de vara obtidos.
3. Testar se o triângulo é possível.
4. Registar o resultado

No final de todas as simulações:

5. Calcular a frequência dos resultados positivos.
6. Avaliar a confiança no valor obtido.

No nosso processo, vamos utilizar o gerador de números aleatórios (na realidade, pseudoaleatórios). O gerador começa sempre pelos mesmos números. Se várias pessoas estiverem a fazer a mesma experiência, todas obterão os mesmos resultados (e lá se vai a confiança no *acaso…*). Convém, por isso, alterar o início do gerador. Abrimos um novo documento com uma página de *Calculadora* e damos a instrução **RandSeed** seguida de um número de vários algarismos. Por exemplo:

RandSeed 280421	*Efectuado*

Passamos agora para uma página de *Listas e Folha de Cálculo*, onde todas as simulações serão feitas, e muitas de uma só vez.

Passo 1) A posição dos pontos será definida pela distância a uma das extremidades da vara, com a distância a variar entre 0 e 1. O comando *rand(* gera precisamente números aleatórios nesse intervalo.

Na coluna A ficarão as posições do primeiro ponto (pt1) e na coluna B as do segundo ponto (pt2). Faremos mil simulações de uma só vez, dando a instrução *rand(1000)* em cada coluna.

	A pt1	B pt2	C	D	E	F
=	=rand(1000	=rand(1000				
1	0.052561	0.509483				
2	0.930911	0.509548				
3	0.060756	0.856151				
4	0.078548	0.469099				
5	0.812938	0.574749				
6	0.399882	0.856758				
7	0.955541	0.401688				
8	0.859088	0.766596				

C1

Passo 2) Nas três colunas seguintes ficarão os comprimentos dos *três pedaços* (*ped1, ped2 e ped3*) de vara.

Coluna C: *ped1* = distância da origem ao menor dos dois pontos, com o comando *=min(pt1,pt2).*

Coluna D: *ped2* = distância entre os dois pontos, com o comando *=abs(pt1-pt2).*

Coluna E: *ped3* = distância do maior dos pontos à extremidade da vara, com o comando *=1-max(pt1,pt2).*

	A pt1	B pt2	C ped1	D ped2	E ped3
=	=rand(1000	=rand(1000	=min(pt1,ı	=abs(pt1−	=1−max(p
1	0.052561	0.509483	0.052561	0.456922	0.490517
2	0.930911	0.509548	0.509548	0.421362	0.069089
3	0.060756	0.856151	0.060756	0.795395	0.143849
4	0.078548	0.469099	0.078548	0.390551	0.530901
5	0.812938	0.574749	0.574749	0.238189	0.187062
6	0.399882	0.856758	0.399882	0.456876	0.143242
7	0.955541	0.401688	0.401688	0.553853	0.044459
8	0.859088	0.766596	0.766596	0.092492	0.140912

E ped3:=1−max(pt1,pt2)

Note-se que cada linha corresponde a uma simulação.

Passo 3) Testar se o triângulo é possível.

Aqui, poderíamos ser tentados a usar diretamente a desigualdade triangular: qualquer lado tem de ser menor que a soma dos outros dois. Mas isso obrigaria a uma série de operações. Vamos partir da desigualdade mas fazendo umas alterações:

ped1 < ped2 + ped3

somando ped1 em ambos os membros:

ped1 + ped1 < ped1 + ped2 + ped3

mas a soma dos três pedaços é igual a 1, logo

2.ped1 < 1 ou ped1 < 0,5

Ou seja, para o triângulo ser possível, cada um dos pedaços tem de ser menor que 0,5.

Então, temos de pôr numa nova coluna o maior dos três pedaços. Só que a instrução *max(* só permite a comparação entre dois valores. Para não termos de fazer isto em duas operações, vamos usar um artifício. Na coluna F condensamos as duas comparações numa só com o comando *=max(ped1,max(ped2,ped3))*.

Passo 4) Registo dos resultados

O triângulo é possível se, na coluna F (*pedmaior*), o número for inferior a 0,5.

Pedimos agora que sejam contados quantos valores da coluna *pedmaior* não excedem 0,5. Para isso, numa célula da coluna G, damos a instrução *=countIf(pedmaior,?<0.5)*.

	C ped1	D ped2	E ped3	F pedmaior	G	H
=	=min(pt1,ı	=abs(pt1−	=1−max(p	=max(ped1		
1	0.052561	0.456922	0.490517	0.490517	triângulos	
2	0.509548	0.421362	0.069089	0.509548	263	
3	0.060756	0.795395	0.143849	0.795395		
4	0.078548	0.390551	0.530901	0.530901		
5	0.574749	0.238189	0.187062	0.574749		
6	0.399882	0.456876	0.143242	0.456876		
7	0.401688	0.553853	0.044459	0.553853		
8	0.766596	0.092492	0.140912	0.766596		
9	0.275456	0.142511	0.582032	0.582032		
10	0.224771	0.083504	0.691725	0.691725		
11	0.127425	0.066384	0.806191	0.806191		

G2 =countif(pedmaior,?<0.5)

Passo 5) Calcular a frequência dos resultados positivos.

Em 1000 simulações formaram-se 263 triângulos. A frequência relativa é 0,263. A probabilidade procurada estará perto de deste valor. Apesar de mil experiências nos parecerem muitas, temos de ir mais longe.

Passo 6) Avaliar que crédito dar ao valor obtido, pedindo um intervalo de confiança.

Fazemos isto numa página de *Calculadora*, pedindo o *intervalo z de uma proporção*.

zInterval_1Prop 263,1000,0.95: *stat.results*

$$\begin{bmatrix} \text{"Título"} & \text{"Intervalo z de 1 prop"} \\ \text{"CLower"} & 0.235713 \\ \text{"CUpper"} & 0.290287 \\ \text{"}\hat{p}\text{"} & 0.263 \\ \text{"ME"} & 0.027287 \\ \text{"n"} & 1000. \end{bmatrix}$$

Vemos que o resultado das nossas mil experiências acontecerá 95% das vezes se a probabilidade real estiver entre 0,2357 e 0,2903. Há ainda uma grande imprecisão.

Afinal, mil simulações não são muitas. Temos de fazer mais. Para isso, vamos repetir o processo e pôr a máquina a guardar o resultado de cada milhar de casos. Com o comando *Guardar var,* transformamos o valor da célula G2 numa variável, dando um nome (por exemplo, *exitos*) e pedimos que os valores que ali forem aparecendo sejam guardados na coluna H (com o comando *Captura de dados Automático*).

Mas, felizmente, não temos de refazer o trabalho todo. Agora, cada vez que carregarmos simultaneamente nas teclas *ctrl* e *R*, o programa faz mais mil simulações e regista o resultado na coluna H. O processo é muito rápido.

	C ped1	D ped2	E ped3	F pedmaior	G	H
=	=min(pt1,ı	=abs(pt1−	=1−max(p	=max(ped1		=capture('
1	0.234441	0.382322	0.383237	0.383237	Triângulos	263
2	0.854833	0.029932	0.115236	0.854833	266	256
3	0.04365	0.496726	0.459624	0.496726		272
4	0.294194	0.620664	0.085142	0.620664	Repetições	250
5	0.053471	0.523191	0.423338	0.523191	100	268
6	0.00857	0.348018	0.643412	0.643412		213
7	0.050149	0.195469	0.754382	0.754382	Probabilid	214
8	0.098417	0.466812	0.434771	0.466812	0.25027	238
9	0.300623	0.505808	0.193569	0.505808		266
10	0.475023	0.342225	0.182752	0.475023		253
11	0.203989	0.125197	0.670814	0.670814		251

H =capture('exitos,1)

Para controlarmos quantas repetições já fizemos, na célula G5 pedimos a dimensão da coluna H, com a instrução *=dim(h[ ])*. Depois, calculamos a frequência relativa dividindo a soma da coluna H por mil vezes o número de repetições.

Neste exemplo foram feitas 100 repetições, o que dá um total de cem mil simulações. Feito isto, pedimos o intervalo de confiança a 95%.

```
zInterval_1Prop 25027,100000,0.95: stat.results
   "Título"    "Intervalo z de 1 prop"
   "CLower"        0.247585
   "CUpper"        0.252955
     "p̂"           0.25027
    "ME"           0.002685
     "n"           100000.
```

Agora, temos valores entre 0,2476 e 0,2530. A imprecisão é muito menor e ficamos com a suspeita de que a probabilidade de obter um triângulo será 0,25 (ou muito próxima). Mas passemos a outra abordagem.

2.º MÉTODO – MONTE CARLO COM PROGRAMAÇÃO

Se soubermos programar, podemos ir muito mais longe no número de simulações. Eis aqui um programa em Basic, que pode ser facilmente adaptado (e melhorado…) para outra linguagem de programação que o leitor prefira.

```
Define formartri()=
Prgm
Request "Simulações",s
êxito:=0.
For i,1,s
  pontos:=rand(2)
  pontos:=augment(pontos,{0,1})
  SortA pontos
  pedmaior:=max(ΔList(pontos))
  If pedmaior<0.5 Then
    êxito:=êxito+1
  EndIf
EndFor
Disp "P(formar triângulo) = ",((êxito)/(s))
EndPrgm
```

```
formartri()

Simulações 10000000
P(formar triângulo) = 0.250085

                                   Efectuado

zInterval_1Prop êxito,s,0.95: stat.results
   "Título"    "Intervalo z de 1 prop"
   "CLower"        0.249817
   "CUpper"        0.250354
     "p̂"           0.250085
    "ME"           0.000268
     "n"           1.E7
```

Após dez milhões de simulações, obteve-se o valor 0,250085, sendo de esperar que a probabilidade esteja entre 0,2498 e 0,2504.

3.º MÉTODO – RESOLUÇÃO GEOMÉTRICA

Podemos fazer melhor e obter o valor exato da probabilidade, usando um processo geométrico.

Ao sortear os dois pontos aleatórios, que variam entre 0 e 1, o espaço de resultados é equivalente aos pontos de um quadrado de lado 1 (e podemos colocá-lo no 1.º quadrante de um gráfico cartesiano, com um vértice na origem do referencial). No eixo horizontal vamos pôr a posição do ponto 1 e no eixo vertical a do ponto 2. Temos agora de descobrir, no quadrado, quais são as regiões que correspondem a casos em que o triângulo é possível.

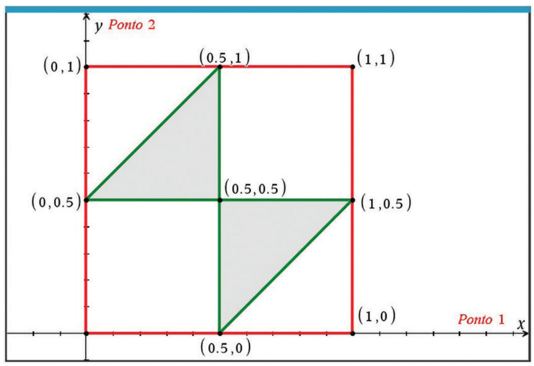
Em vez de ir logo para o caso geral, comecemos com um caso concreto.

Admitamos que o primeiro ponto (x) é inferior 0,5. Por exemplo 0,3. O segundo ponto (y) não pode ser inferior a 0,5 porque ficava o terceiro pedaço de vara ($1-y$) maior que 0,5. Logo $y>0{,}5$. Mas y não pode estar a uma distância de x superior a 0,5, logo $y<0{,}8$.

No caso geral e quando x é inferior a 0,5 será $0{,}5<y<x+0{,}5$.

Quando x for maior que 0,5, um raciocínio semelhante diz-nos que $x-0{,}5<y<0{,}5$.

Já podemos representar graficamente a zona de casos favoráveis. Ela corresponderá aos dois triângulos sombreados da figura.



É fácil ver que a área de cada triângulo é a oitava parte da do retângulo. Logo, a região favorável tem uma área igual a um quarto. Tal como suspeitávamos, a resposta ao problema é exatamente 0,25.

INDO MAIS LONGE

Não podemos ficar por aqui. Agora que o leitor já é um "especialista na situação", aqui fica o desafio:

Se partirmos a vara por três pontos ao acaso, qual é a probabilidade de ser possível construir um quadrilátero com os quatro pedaços obtidos?

José Paulo Viana