Propagação da doença

Manuela Pires

A PRIMEIRA AULA

Durante vários anos, na aula de apresentação nas novas turmas, 7.º ou 10.º anos, levávamos o saco das calculadoras gráficas (no 7.º ano, a codocência da Margarida era imprescindível para tudo correr bem), cada aluno ficava com uma e experimentava a instrução *rand int (1, n.º total de alunos, 1)* para obter um número aleatório. Dentro do saco havia sobretudo TI 83 e 84 e acontecia que em algumas saía a mesma sequência de números. Para obviar este problema, cada aluno inseria um número diferente, normalmente o número de telefone e armazenavam esse número em *rand*. Atualmente no modelo *TI-Nspire CX* usam o comando *randseed*, seguido de um número. Assim, o gerador de números já dá origem a sequências diferentes. Quando todos dominavam a instrução, a experiência começava a sério. Como uma grande parte não se conhecia entre si, quando era tirado o número de um aluno, este fazia uma pequena apresentação: nome, escola de onde vem, turma. No último 10.º ano que tive, perguntei também o que mais tinham gostado de fazer nas férias de verão. Vários referiram a praia com os amigos, três alunas o encontro nacional de escuteiros, muitos as viagens com os pais… O convívio bem no alto das preferências. É o que perdem os nossos jovens nestes tempos de pandemia. No 12.º ano repetia a simulação com o objetivo de trabalhar a função logística.

Começava por dizer que íamos fazer uma simulação sobre a propagação de uma doença num espaço fechado como o da sala de aula em que, a cada minuto, um aluno doente infeta um e um só colega. Para saber quem é o primeiro doente, o professor obtém aleatoriamente um número. O aluno com esse número de ordem levanta-se, faz a apresentação que se combinar, sendo ele o primeiro a contrair a doença.

O aluno doente obtém um novo número aleatório que corresponderá a um novo doente, o qual também ficará de pé. Em cada simulação, cada aluno doente tira aleatoriamente um único número, que corresponderá ao colega que ele irá contaminar, repetindo-se o procedimento anterior. Pode acontecer que o número obtido corresponda a um aluno já contaminado, não dando origem a um novo doente.

Antes de começar a experiência, temos que preparar bem os registos, pois às tantas fica uma grande animação. Costumo também perguntar qual é a estimativa que fazem de quantos minutos são necessários para ficarem todos doentes, para no final discutir o que os levou a pensar naquele valor.

Num dos lados do quadro desenha-se uma tabela com 3 colunas: Minutos; Número de novos doentes e Número total de doentes (figura 1) e, no outro lado, escrevem-se os números de todos os alunos da turma (figura 2).

Em cada uma das simulações, cortam-se os números na lista e registam-se os dados na tabela. A tabela da figura 1 corresponde a uma das simulações feita numa turma do 12.º ano com 28 alunos. Ao fim de 5 minutos estão 9 alunos infetados, que estão de pé e tiram 9 números aleatórios, mas alguns dos alunos já estavam doentes, pois no 6.º minuto temos apenas 4 novos doentes: os números 8; 9; 17 e 26. Depois de fazer o registo na tabela não nos podemos esquecer de traçar os números para, em cada simulação, ser sempre visível o número de novos doentes.

minutos	N.º de novos doentes	N.º total de doentes
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	3	6
5	3	9
6	4	13
7	6	19
8	6	25
9	2	27
10	0	27
11	1	28

Figura 1. Tabela com os dados da experiência

~~1~~ 2 3 ~~4~~ ~~5~~ 6 7
8 9 10 11 12 ~~13~~ 14
~~15~~ 16 17 18 ~~19~~ 20 ~~21~~
22 23 ~~24~~ 25 26 27 ~~28~~

Figura 2. Números dos alunos da turma

Usualmente a recolha direta de dados permite uma melhor compreensão das situações. Neste caso, é visível que no início o aumento do n.º de doentes é lento e que há uma altura em que esse crescimento é rápido. Mas, quando já há muitos doentes, a contaminação é mais difícil. Há muitos números que correspondem a alunos já contaminados e o n.º de novos doentes começa a ser menor. Nessa altura é usual os alunos trocarem de posição e os alunos sãos levantam-se, enquanto os doentes se sentam. Nesta turma aconteceu que ao 10.º minuto nenhum novo aluno foi contaminado e estavam todos a tentar contaminar o único aluno que estava são e de pé. Ninguém esquece quem foi o resistente.

Terminada a experiência, introduzem-se os dados das duas primeiras colunas na folha de cálculo da calculadora. Na 3.ª coluna faz-se a soma acumulada, que corresponde ao n.º total de doentes em cada minuto, dando a instrução da calculadora que se vê na figura 3.

Depois fazem-se os gráficos de dispersão do n.º de novos doentes e do n.º total de doentes, separados e juntos (figura 4) para melhor se ver a relação entre o que acontece no ponto que corresponde ao máximo do n.º de novos doentes, com o ponto em que muda a forma como cresce a curva do n.º total de doentes. A projeção dos gráficos no quadro permite a discussão conjunta sobre as variáveis e as caraterísticas dos gráficos.

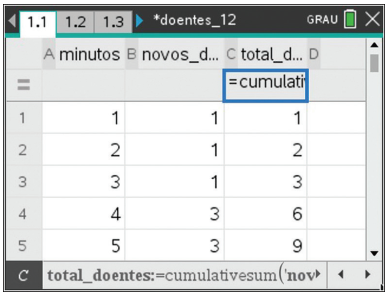


Figura 3. Listas de dados na calculadora

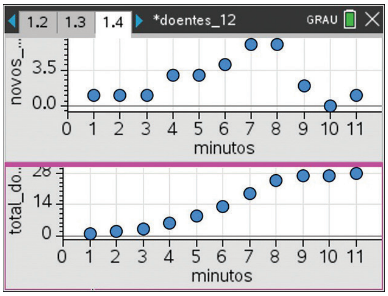


Figura 4. Gráficos do número de novos doentes e do número total de doentes

Quanto maior for o grupo em que se faz a simulação, mais perfeitas ficam as curvas, com o gráfico do n.º de novos doentes a ficar com uma bela forma de sino, mas esta é uma boa experiência com o número de alunos que usualmente temos nas turmas.

Nas aulas de apresentação, pretendia passar a mensagem de que algumas vezes iriamos fazer experiências de formas simples e interpretá-las e que a calculadora iria estar presente na aula de matemática, pois é um bom auxiliar. No 12.º ano pretendia trabalhar a modelação com a função logística (figura 5), como se vê em seguida.

ENCONTRAR UMA FUNÇÃO PARA OS DADOS

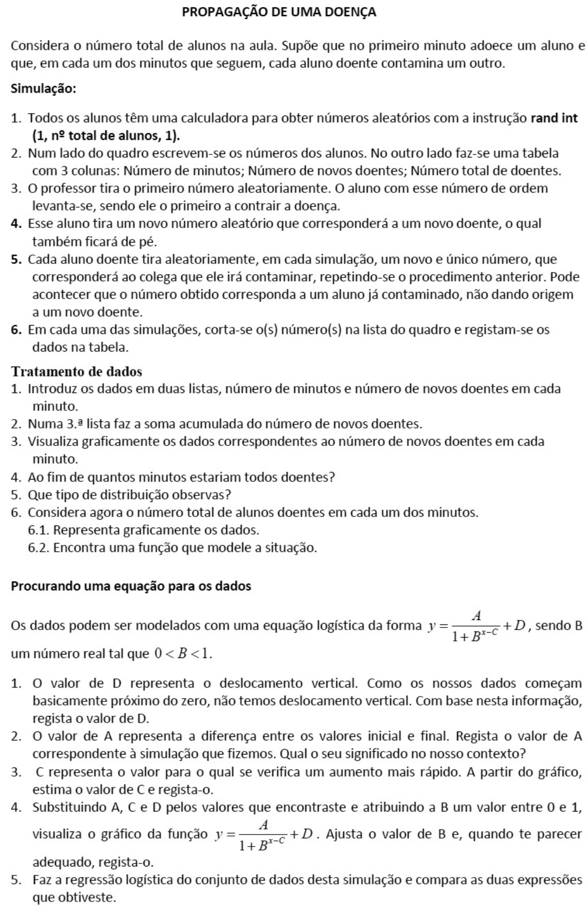
A procura manual de uma função que se adeque aos dados permite compreender o seu significado.

Consideremos o modelo:

$y=\dfrac{A}{1+B^{x-C}}+D$, sendo B um número real, tal que $0<B<1$.

Neste caso, podem-se determinar os valores dos parâmetros D, A e C, seguindo as sugestões da proposta de trabalho. Como a turma tem 28 alunos, esse será o valor da amplitude A. Sem grande perda de significado podemos considerar para D o valor zero e para C, o valor 6, número de dias que são necessários para o número de doentes ser metade e valor para o qual se verifica um crescimento mais rápido. Determinar o valor de B, que representa o crescimento mais ou menos acentuado da curva, requer experimentação para ajustar a curva aos dados. Para isso, utilizamos as capacidades da calculadora.

Numa página de gráficos, inserimos um gráfico de dispersão (menu - introdução/edição de gráficos – gráfico de dispersão) e procuramos em **vars**, a variável 'minutos' para x e a variável 'total_doentes' para y (figura 6). Adequamos o zoom (menu-



PROPAGAÇÃO DE UMA DOENÇA

Considera o número total de alunos na aula. Supõe que no primeiro minuto adoece um aluno e que, em cada um dos minutos que seguem, cada aluno doente contamina um outro.

Simulação:

1. Todos os alunos têm uma calculadora para obter números aleatórios com a instrução **rand int (1, nº total de alunos, 1).**
2. Num lado do quadro escrevem-se os números dos alunos. No outro lado faz-se uma tabela com 3 colunas: Número de minutos; Número de novos doentes; Número total de doentes.
3. O professor tira o primeiro número aleatoriamente. O aluno com esse número de ordem levanta-se, sendo ele o primeiro a contrair a doença.
4. Esse aluno tira um novo número aleatório que corresponderá a um novo doente, o qual também ficará de pé.
5. Cada aluno doente tira aleatoriamente, em cada simulação, um novo e único número, que corresponderá ao colega que ele irá contaminar, repetindo-se o procedimento anterior. Pode acontecer que o número obtido corresponda a um aluno já contaminado, não dando origem a um novo doente.
6. Em cada uma das simulações, corta-se o(s) número(s) na lista do quadro e registam-se os dados na tabela.

Tratamento de dados

1. Introduz os dados em duas listas, número de minutos e número de novos doentes em cada minuto.
2. Numa 3.ª lista faz a soma acumulada do número de novos doentes.
3. Visualiza graficamente os dados correspondentes ao número de novos doentes em cada minuto.
4. Ao fim de quantos minutos estariam todos doentes?
5. Que tipo de distribuição observas?
6. Considera agora o número total de alunos doentes em cada um dos minutos.
   6.1. Representa graficamente os dados.
   6.2. Encontra uma função que modele a situação.

Procurando uma equação para os dados

Os dados podem ser modelados com uma equação logística da forma $y=\dfrac{A}{1+B^{x-C}}+D$, sendo B um número real tal que $0<B<1$.

1. O valor de D representa o deslocamento vertical. Como os nossos dados começam basicamente próximo do zero, não temos deslocamento vertical. Com base nesta informação, regista o valor de D.
2. O valor de A representa a diferença entre os valores inicial e final. Regista o valor de A correspondente à simulação que fizemos. Qual o seu significado no nosso contexto?
3. C representa o valor para o qual se verifica um aumento mais rápido. A partir do gráfico, estima o valor de C e regista-o.
4. Substituindo A, C e D pelos valores que encontraste e atribuindo a B um valor entre 0 e 1, visualiza o gráfico da função $y=\dfrac{A}{1+B^{x-C}}+D$. Ajusta o valor de B e, quando te parecer adequado, regista-o.
5. Faz a regressão logística do conjunto de dados desta simulação e compara as duas expressões que obtiveste.

Figura 5. Tarefa proposta no 12.º ano

janela/zoom-dados) para visualizar os pontos. Queremos agora introduzir a função que se ajuste melhor aos dados. Como, por defeito, quando acedemos à linha de edição de gráficos surge o gráfico de dispersão s2, temos de voltar ao menu - introdução/edição de gráficos – gráfico de uma função. O mais prático é introduzir o modelo com os valores encontrados para os parâmetros A, C e D e escrever a letra B na fórmula, pois ao fazer-se enter, aparece uma janela para criar o seletor que nos permite variar o B (no seletor, os parâmetros aparecem sempre escritos com letra minúscula, mesmo que se digite uma letra maiúscula. Daí o parâmetro B da fórmula aparecer b nos écrans da calculadora) e obter as tão atualmente famosas curvas mais ou menos achatadas. O crescimento vai sendo mais lento, quanto mais b se aproxima de 1. O ponto de inflexão de coordenadas (6,14), foi estimado, mas parece adequado aos dados. Nesta função podemos confirmar o valor da abcissa do ponto de inflexão, calculando o maximimizante da 1.ª derivada (figura 7).

O trabalho realizado com a recolha direta de dados e a estimativa de valores para os parâmetros do modelo permite, no âmbito da física ou da biologia, fazer uma interpretação do papel de cada um dos parâmetros. A construção da função logística através das transformações geométricas permite uma melhor compreensão do modelo logístico.

O MODELO DA CALCULADORA

Em muitas situações de modelação utilizamos as regressões da calculadora que, ao longo dos anos, também têm aperfeiçoado os modelos. Por exemplo, a calculadora TI-Nspire CX tem agora dois modelos de logística, um com D=0 e a outra com D ≠0. Tal como no exemplo manual, optamos pelo modelo em que D=0. A análise do gráfico de resíduos mostra que o modelo se adequa aos dados (figura 8). Partir da experiência e encontrar os valores dos parâmetros que traduzem a situação permite um tipo de compreensão do modelo, mas a regressão da calculadora permite outro tipo de análise com a interpretação do coeficiente de determinação (noutras regressões) e a análise dos resíduos.

Com um pouco de álgebra podemos relacionar os dois modelos apesar de terem aparências diferentes.

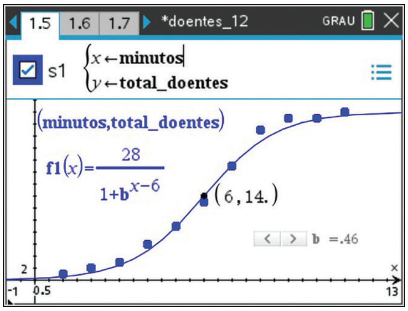


Figura 6. Gráfico de dispersão do número total de doentes e função logística

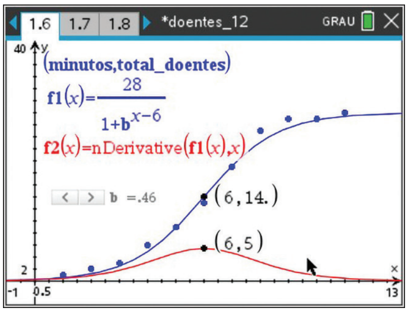


Figura 7. Relação entre as curvas do número total de doentes e dos novos doentes

No modelo manual, obtemos

$$0.46^{x-6}=0.46^{x}\times0.46^{-6}=105.55\times0.46^{x}$$

No modelo da calculadora, obtemos $85.48\times e^{-0.73x}=85.48\times0.48^{x}$

AINDA AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS PARA CHEGAR À FUNÇÃO LOGÍSTICA.

Durante alguns anos iniciei o estudo da logística com esta experiência. No entanto, o trabalho com as transformações geométricas que fazemos ao longo do secundário tem um papel fundamental na compreensão do modelo logístico. Tenho sempre dúvidas se será melhor começar com a experiência ou com as transformações, mas ambas as abordagens fazem falta e que bonitas, elucidativas e poderosas são as transformações da exponencial até à logística.

Duas transformações simples, subir de uma unidade a função exponencial de base inferior a 1, e depois fazer o inverso, permite-nos obter a função logística cujo contradomínio é o intervalo]0,1[e o ponto de inflexão é I de coordenadas $(0, \frac{1}{2})$ (figura 9).

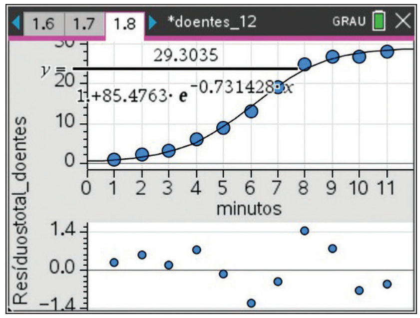


Figura 8. Regressão logística da calculadora e gráfico de resíduos

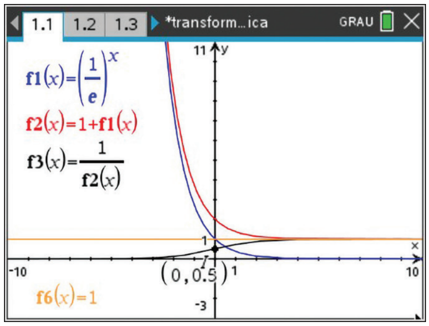


Figura 9. Transformações geométricas da função exponencial

Em seguida aumenta-se a amplitude, multiplicando-se a função *f3* por um determinado valor, neste caso 8, e obtém-se a função que tem como contradomínio o intervalo]0,8[. Depois desloca-se o gráfico da função para a direita, por exemplo 5 unidades.

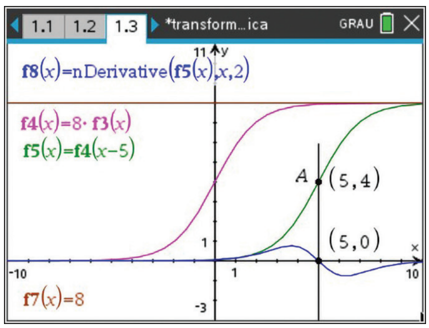


Figura 10. Transformações geométricas da função logística e ponto de inflexão

Determinar a abcissa do ponto de inflexão, por exemplo a partir do zero da segunda derivada permite relacionar o ponto de inflexão obtido por deslocamento horizontal com o ponto obtido através da análise (figura 10). E cá temos de uma forma compreensiva as belas curvas que todos os dias entram pela nossa casa dentro, nos dias de hoje por maus motivos, mas que são indispensáveis para os cidadãos compreenderem o mundo em que habitamos.

Manuela Pires