

Diferentes classificações

Aquele teste foi feito por 11 alunos. As classificações, na escala de 0 a 200, foram todas diferentes, sendo 51 a mais baixa e 182 a mais alta. A média foi exatamente 110.

Se ordenarmos as classificações, qual é o intervalo de valores em que pode estar a nota do aluno que ocupa a posição central?

(Respostas até 26 de março, para zepaulo46@gmail.com)

UM “POLÍGONO” CURVO

O problema proposto no número 156 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Quatro circunferências, cada uma de raio 5 centímetros, passam todas por um ponto P, interior à figura por elas definida.

Qual é o perímetro desta figura?

Recebemos nove respostas: Adelina Precatado (Amadora), Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Carlos Dias (Silveira), Letícia Martins (Guimarães), Mário Roque (Guimarães), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Rogério Berrincha e Susana Dias.

O Mário principia da seguinte forma:

O enunciado do problema parecia sugerir uma resposta única...

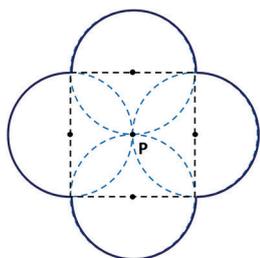
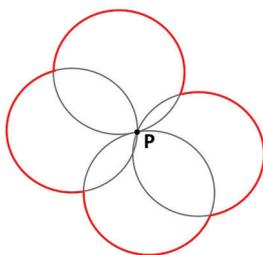
Foi por aí que comecei, analisando um caso particular, em que o ponto P é o centro de um quadrado...

A análise geométrica da figura permite de imediato perceber que, na fronteira do desenho, temos duas circunferências completas...

Um programa de geometria dinâmica convenceu-me depois que isto não se alteraria [quando se modificavam as posições das circunferências].

Os programas de geometria dinâmica permitem verificar centenas de posições diferentes e, como o resultado não se altera, “convence-nos” que o resultado está certo. Foi o que fizeram a Adelina e a Letícia (e a Letícia acrescentou mesmo um vídeo que nos permite ver isso: <https://youtu.be/9C6S1oWufqI>). Mas é preciso garantir a veracidade do resultado com uma demonstração matemática.

A Susana começa por afirmar: *O primeiro passo para poder solucionar o problema é entender onde se localizam os centros das circunferências que desenharemos.* Isso acontece se os quatro centros ficarem sobre uma circunferência de centro em P e raio 5. Os processos utilizados a seguir foram variados, uns mais simples que outros. Vejamos o da Alice.



Temos as quatro circunferências de raio 5, todas a passar num ponto P (para não sobrecarregar a figura, omitimos a circunferência de raio 5 e centro P onde se situam os centros das quatro circunferências).

Sejam A, B, C e D os pontos de interseção das circunferências que delimitam os arcos que formam o

“polígono curvo”. Unimos P com cada um destes quatro pontos. Sabemos que um ângulo inscrito numa circunferência mede metade da medida do arco correspondente. Por outro lado, o comprimento de um arco é igual à sua medida em radianos vezes o raio. Então:

APB é um ângulo inscrito que mede δ , logo o arco exterior AB mede 2δ e o seu comprimento é $2\delta \times 5$.

BPC é um ângulo inscrito que mede α , logo o arco exterior BC mede 2α e o seu comprimento é $2\alpha \times 5$.

CPD é um ângulo inscrito que mede β , logo o arco exterior CD mede 2β e o seu comprimento é $2\beta \times 5$.

DPA é um ângulo inscrito que mede γ , logo o arco exterior DA mede 2γ e o seu comprimento é $2\gamma \times 5$.

Portanto, o perímetro do “polígono curvo” é:

$$AB + BC + CD + DA = 10\delta + 10\alpha + 10\beta + 10\gamma = 10(\delta + \alpha + \beta + \gamma)$$

Mas $\delta + \alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, logo

$$\text{Perímetro} = 20\pi.$$

Várias outras resoluções (Rogério, Alberto, Mário, Susana) começaram por demonstrar que o quadrilátero ABCD é um paralelogramo (ou outra propriedade equivalente). Por esse motivo, o arco interior APB é igual ao arco exterior CD e, do mesmo modo, o arco interior CPD é igual ao arco exterior AB. Logo, estes dois arcos exteriores opostos (AB e CD) são equivalentes a uma circunferência completa. O mesmo acontece com os arcos AD e BC. Logo, o perímetro da figura é igual ao dobro do perímetro de cada circunferência.

Alguns foram mais longe. O Carlos mostrou que, qualquer que seja o número de circunferências, o perímetro é sempre 20π . O Pedrosa Santos analisou os casos em que o ponto P pertence à fronteira da figura (e não ao seu interior), vendo como variaria o perímetro.