

O texto que se segue mostra a importância do uso de tecnologias e tem características de um texto de investigação. Por essas razões, foi selecionado em simultâneo para duas secções da EM: Espaço GTI e Tecnologias na Educação Matemática.

Hélia Pinto - Coordenadora do GTI

António Domingos - Responsável pela secção Tecnologias na Educação Matemática

A calculadora gráfica no ensino básico – uma conexão entre os domínios de Funções do 7.º ano e Geometria do 9.º ano

Tendo em consideração as indicações metodológicas impostas pelo Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico, em Portugal (Ministério da Educação e Ciência [MEC], 2013), a utilização da calculadora só deverá ocorrer em situações pontuais que envolvam resolução de problemas, como por exemplo, um elevado número de cálculos, o uso de valores aproximados, operações de radiciação ou a determinação de razões trigonométricas ou de amplitude de ângulos dada uma razão trigonométrica e desde que seja mesmo imprescindível.

Porém, segundo os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2017), um programa de Matemática de excelência deverá contemplar a integração da tecnologia, dado que favorece a aprendizagem e compreensão das ideias matemáticas, o raciocínio matemático e a comunicação de raciocínios. Lopes e Domingos (2015), num estudo que realizaram, concluíram que é viável utilizar a calculadora gráfica no ensino básico, promovendo ambientes ricos e motivadores de aprendizagem.

Um ensino eficaz, de modo a promover um aprofundamento na compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos, requer que os alunos estabeleçam conexões entre representações matemáticas. E, ainda, a articulação entre vários domínios da Matemática, pode amenizar fronteiras, na medida em que os alunos podem usar ideias sobre uma determinada área, para compreenderem melhor outra área da Matemática (NCTM, 2017).

A situação de aprendizagem que a seguir é descrita, envolveu a realização de uma tarefa de natureza exploratória (Canavarro, 2011), com recurso à calculadora gráfica. Não sendo aconselhado o uso desta ferramenta no currículo prescrito do ensino básico, os autores apresentam uma dinâmica curricular inovadora neste nível de ensino, com a inclusão da calculadora gráfica TI-nspire CX, da *Texas Instruments*. Procurou-se fazer uma conexão entre o domínio das Funções, Sequências e Regularidades (FSS7) no 7.º ano de escolaridade e o domínio da Geometria e Medida no 9.º ano de escolaridade. Esta tarefa foi proposta no final da unidade de Funções. Anteriormente, os alunos tiveram oportunidade de realizar tarefas com a calculadora gráfica, nos

dois domínios distintos, mas nunca em conjunto. Tendo em consideração o *software* da calculadora gráfica, nomeadamente as aplicações **Geometria**, **Listas** e **Folha de Cálculo e Dados e Estatística**, pretendeu-se que os alunos transitassem entre várias representações (Tripathi, 2008), de modo que, através da construção de conceitos inerentes ao 9.º ano de escolaridade, consolidassem o conceito de função linear intrínseco ao programa do 7.º ano de escolaridade.

METODOLOGIA

A tarefa realizou-se numa turma do 7.º ano, no ano letivo de 2016/2017, numa escola pública do distrito de Setúbal, no primeiro ano de uma experiência de ensino mais ampla. A mesma teve a duração de dois anos consecutivos, nos 7.º e 8.º anos de escolaridade, respetivamente, e envolveu tarefas de índole exploratória, com recurso à calculadora gráfica.

Num Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) proporcionado pela calculadora gráfica, desenvolveu-se uma prática de ensino e aprendizagem segundo a perspetiva de Freire (2000), “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção” (p. 25).

Os métodos utilizados para recolher os dados apoiaram-se nos relatórios escritos dos alunos, observação direta, imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica Texas TI-nspire CX e diário de bordo da professora titular da turma, que assumiu o duplo papel de professora e investigadora (Creswell, 2012).

Embora o estudo tivesse sido realizado com os 29 alunos da turma, decidiu-se pela modalidade de estudo de caso (Bogdan & Biklen, 1994), de modo a obter uma observação, compreensão e descrição mais minuciosa e dados mais consistentes, sobre a atividade dos discentes. Assim, a investigação recaiu nas ações de quatro alunos, tendo sido adotados os nomes fictícios de Berta e Maria, para um grupo e José e Pedro, para outro grupo. As razões desta escolha justificam-se pelo facto destes alunos evidenciarem um percurso académico semelhante na disciplina de Matemática, boa capacidade oral e escrita, bom comportamento, disponibilidade e motivação para participar no estudo.

A TAREFA E A ANÁLISE DO TRABALHO DOS ALUNOS

Os conteúdos da tarefa (figura 1) explorados nas alíneas a) e b) são específicos do currículo prescrito do 9.º ano de escolaridade e o tópico tratado na alínea c), do currículo prescrito do 7.º ano de escolaridade, de acordo com o Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013). Pretendeu-se que os alunos compreendessem os conceitos de ângulo inscrito e ângulo ao centro, numa circunferência, reconhecessem que a medida da amplitude de um ângulo ao centro é o dobro da medida da amplitude do ângulo inscrito, que lhe corresponde, conseguindo perceber que o modelo matemático que se adequa à situação é o modelo linear. Quando a tarefa foi distribuída aos alunos, estes foram informados que a tinham de resolver a pares e posteriormente fazer um relatório individual. De seguida, seria promovida a discussão coletiva, monitorizada pela professora, seguindo-se a sintetização das descobertas dos alunos (Stein, Engle, Smith & Hughes (2008).

1. Utilizando a calculadora gráfica, constrói a figura ao lado.

a) Qual é a diferença entre um ângulo inscrito ABC e um ângulo ao centro AOC , numa circunferência?

b) Qual é a relação que existe entre a medida da amplitude de um ângulo inscrito ABC e a medida da amplitude do ângulo ao centro AOC , que lhe corresponde?

c) Qual é o modelo matemático que se adequa a esta situação?

Sugestão:

- Na **Página 1**, da aplicação **Geometria** define a variável b para o ângulo ABC e a variável o para o ângulo AOC .
- Na **Página 2**, insere a aplicação **Listas e Folha de Cálculo** e faz uma **captura de dados** relativamente aos valores das variáveis b e o .
- Na **Página 3**, insere a aplicação **Dados e Estatística** e traça uma função tendo em conta as variáveis b e o .

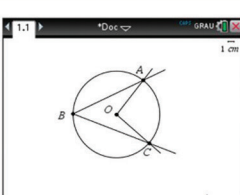


Figura 1. A tarefa apresentada aos alunos.

No que concerne à alínea a), possivelmente através da função de visualização, os alunos conseguiram mobilizar o conceito de ângulo. Por outro lado, através da função de arrastamento, ao arrastar os pontos A e C, toda a figura foi transformada, mas todas as propriedades definidas pelo procedimento de construção, foram mantidas, ou seja, invariantes. Neste sentido, perceberam a diferença entre um ângulo inscrito ABC e um ângulo ao centro AOC , numa circunferência.

No ângulo ABC o vértice B está sobre a circunferência.
No ângulo AOC o vértice O é o centro da circunferência.

Figura 2. Resolução escrita, da alínea a) da tarefa, pela Berta.

No decorrer da discussão coletiva, o aluno José utilizou o significado pessoal de “cortam”, que se movimentou para o significado matemático de “intersectam”, com a interferência da professora, promovendo-se o entendimento de que os lados de um ângulo inscrito são sempre secantes à circunferência, como se pode observar no seguinte excerto:

Professora: Muito bem! E relativamente aos lados desses ângulos? O que é que vocês podem concluir?

José: “Cortam” sempre a circunferência em dois pontos. Um deles é o vértice e o outro ponto também pertence à circunferência.

Professora: Meninos! O que significa cortar? Não sei o que é isso?

José: Oh Stora! “Intersectam” a circunferência em dois pontos.

Professora: Ah! Ok! Assim já entendo! E o que significa intersectar a circunferência em dois pontos?

José: É secante à circunferência!?

Posteriormente, a professora, com o objetivo de formalizar uma definição matemática entre ângulo inscrito e ângulo ao centro, solicitou uma síntese, tendo a mesma sido dada pela aluna Berta, conforme o excerto seguinte:

Berta: Então stora: “No ângulo inscrito ABC , o vértice B está sobre a circunferência e os lados do ângulo são secantes à circunferência. No ângulo ao centro AOC , o vértice O é o centro da circunferência e os lados do ângulo são secantes à circunferência”.

Tendo em consideração a última parte da afirmação da aluna, quando afirmou que os lados de um ângulo ao centro são secantes à circunferência, a mesma ao ser questionada pela professora, argumentou que deveria ter referido que cada lado contém o raio da circunferência e que aplicou a palavra “secante” por ser sinónimo de “concorrente”¹. Por conseguinte, na continuação da discussão gerida e incentivada pela docente, a aluna conseguiu perceber que cada lado do ângulo ao centro é constituído por uma semirreta com origem no centro da circunferência, cujo prolongamento a intersecta num único ponto.

Relativamente à alínea b) os alunos mediram a amplitude do ângulo inscrito ABC e do ângulo ao centro AOC , antes de definirem variáveis b , para a amplitude do ângulo inscrito ABC e a variável o , para a amplitude do ângulo ao centro AOC , conforme a primeira sugestão do enunciado. De seguida, os alunos procederam à divisão da variável b pela variável o ou à divisão da variável o pela variável b , com o objetivo de relacionar a medida da amplitude entre o ângulo inscrito e a medida da amplitude do ângulo ao centro, que lhe corresponde. Entretanto, recorreram à função de arrastamento e alteraram as dimensões da circunferência ou movimentaram os pontos A e C, pertencentes aos lados dos ângulos, verificando que as relações $\frac{b}{o}$ e $\frac{o}{b}$ se aplicam a qualquer circunferência e que se mantinham constantes (figura 3).

Neste contexto, os alunos verificaram que a medida da amplitude de um ângulo inscrito ABC é metade da medida da amplitude do ângulo ao centro AOC , que lhe corresponde, ou que a medida da amplitude do ângulo ao centro AOC é o dobro da medida da amplitude de um ângulo inscrito ABC , que lhe corresponde (figura 3 e figura 4).

¹ A aluna fez confusão com a posição relativa entre retas e planos.

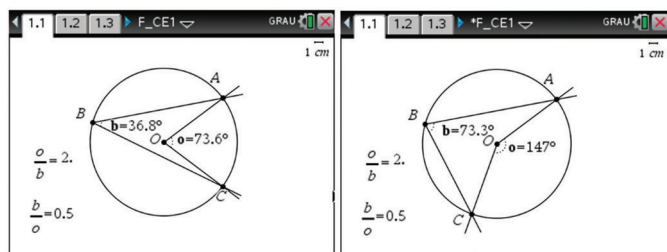


Figura 3. Resolução na calculadora gráfica (utilização da função de arrastamento) da alínea b) da tarefa, pelo Pedro.

Quando nós tiramos o ângulo AOC foi 2 vezes o ângulo ABC e se nós multiplicarmos por 2 o ângulo ABC dá o ângulo AOC, mesmo que mudarmos a figura.

$\frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{A\hat{B}C}{2}$; $A\hat{O}C = A\hat{B}C \times 2$

Figura 4. Resolução escrita, da alínea b) da tarefa, pelo Pedro.

No que respeita à alínea c), os alunos seguiram a segunda e terceira sugestão do enunciado, respetivamente e construíram a Página 2 - Listas e Folha de Cálculo² (figura 5) e a Página 3 - Dados e Estatística (figura 6 e figura 9).

A	ango	B	angb	C	D
=	=capture(')	=capture(')			
1	85.9104	42.9552			
2	88.6837	44.3419			
3	92.0253	46.0127			
4	92.6101	46.3051			
5	95.0188	47.5094			
A1	=85.910395207258				

Figura 5. Resolução na calculadora gráfica (captação de dados, na aplicação Listas e Folha de Cálculo), da alínea c), pelo Pedro.

Os alunos Maria, José e Pedro mobilizaram o significado matemático da representação simbólica e representação gráfica de uma função linear³, relacionaram a alínea b) (figura 4) com a alínea c) e definiram um modelo linear que se adequou à situação. Os alunos delinearam o modelo: $y=0,5x$ ($b=0,5$ o) colocando cuidadosamente a variável dependente e a variável independente⁴ (figuras 6 e 7). O Pedro explorou a posição das variáveis com o objetivo de verificar qual a relação existente entre as mesmas. O aluno estabeleceu o modelo $y=2x$ ($o=2b$) (figura 6), pois na alínea b) também chegou a duas relações (figura 4).

No entanto, surgiram algumas imprecisões. A Berta, na última página⁵ (Página 3), no que concerne à colocação das variáveis b (angb) e o (ango), como variável dependente ou variável independente, respetivamente (figura 9), inseriu aleatoriamente as variáveis. Neste sentido, quando surgiu uma representação

² Quando os alunos capturaram os valores das variáveis o e b para a folha de cálculo, denominaram essas variáveis por ango e angb, respetivamente.

³ Quando surgiu uma imagem no ecrã da calculadora gráfica, caracterizada por pontos que representam uma reta que passa pela origem.

⁴ Os alunos colocaram o cursor da calculadora gráfica nos vários pontos da função e verificaram que o valor da variável dependente (ordenada) era sempre metade do valor da variável independente (abscissa).

⁵ Aplicação Dados e Estatística na calculadora gráfica.

no ecrã da calculadora gráfica, definida por pontos alinhados semelhante à representação gráfica da expressão analítica de uma função linear, desenvolveu o significado matemático de função linear. Posto isto, fez uma relação com a resposta que tinha dado na alínea b) (figura 8) e definiu o modelo linear, $y=2x$ ($ango=2angb$) (figura 10).

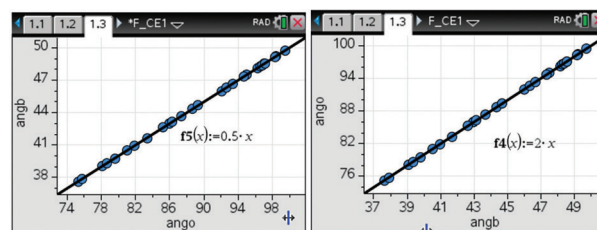


Figura 6. Resolução na calculadora gráfica, da alínea c) da tarefa, na aplicação Dados e Estatística, pelo Pedro.

O modelo matemático que se adequa a esta situação é $y=0,5x$, pois a equação é uma função linear do tipo $y=ax$. Neste caso, temo de ser $b=\frac{1}{2}o$, onde b é a variável dependente e o é a variável independente.

Figura 7. Resolução escrita, da alínea c) da tarefa, pela Maria.

Neste contexto, podemos conjecturar que a aluna demonstrou uma ausência de pensamento crítico, visto que não percecionou que segundo a sua colocação das variáveis (figura 9), o modelo que se adaptava à situação seria $y=0,5x$ ($angb=0,5ango$). A aluna não posicionou o cursor nos vários pontos do gráfico de modo a verificar a relação existente entre a abscissa e a ordenada, isto é, a relação entre as variáveis, que tinha evidenciado na alínea b). Apenas interpretou a imagem que surgiu no ecrã da calculadora gráfica.

A relação que os ângulos têm é que a amplitude do ângulo AOC é sempre o dobro da amplitude do ângulo ABC, mesmo que movamos os pontos A e C.

$$A\hat{O}C = 2A\hat{B}C$$

Figura 8. Resolução escrita, da alínea b) da tarefa, pela Berta.

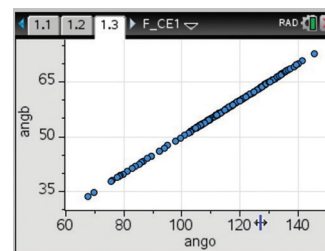


Figura 9. Resolução na calculadora gráfica, da alínea c) da tarefa, pela Berta.

O modelo matemático que se adequa a esta situação é $y=2x$ que significa $o=2b$. Assim conclui-se que a variável dependente é b e a independente é o .

Figura 10. Resolução escrita, da alínea c) da tarefa, pela Berta.

Contudo, esta ambiguidade, foi esclarecida e colmatada na discussão coletiva, conforme se pode verificar no seguinte excerto:

Berta: Oh, stora, o modelo que eu fiz, foi $y=2x$, porque eu vi que a reta passava pela origem do referencial, logo só podia ser uma função linear. Então, eu pensei que era **ango**=2**angb** porque na alínea b) eu concluí que a medida da amplitude do ângulo ao centro é o dobro da medida da amplitude do ângulo inscrito. Devia ter dito que **ango** é a variável dependente e **angb** é a variável independente.

Mas, eu sei que me enganei! Na aplicação Dados e Estatística, o meu erro, foi ter colocado as variáveis ao contrário e não reparei que o valor da abcissa é sempre metade do valor da ordenada, nesta situação, claro! E então eu deveria ter percebido que o modelo era $y=0,5x$ (**angb**=0,5**ango**). Portanto, neste caso, o **angb** é a variável dependente e fica no eixo das ordenadas e **ango** é a variável independente e fica no eixo das abcissas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os alunos mostraram um excelente desempenho e motivação na resolução desta tarefa de natureza exploratória, num AGD, promovido pela calculadora gráfica. No entanto, em certas situações, como por exemplo, na resolução da alínea c), pela Berta, verificou-se que a gestão e monitorização da professora na discussão coletiva, foi crucial para a construção do conhecimento matemático. Ainda, na mesma alínea, esta aluna fez transparecer uma dificuldade técnica, que podemos conjecturar que se tratou de um problema conceptual (Drijvers & Trouche, 2008). Quando relacionou a resposta que apresentou na alínea b) com a imagem que obteve no ecrã da calculadora gráfica na alínea c) e definiu o modelo linear $y=2x$, construiu o modelo matemático sem ter em consideração a relação de dependência entre as variáveis. Dado que colocou aleatoriamente as variáveis na aplicação Dados e Estatística, não percecionou que o modelo que se ajustava à situação, seria a função linear $y=0,5x$ e não $y=2x$.

Tendo em consideração o objetivo didático da tarefa, os alunos evidenciaram facilidade em transitar entre as várias representações: geométrica, tabular, gráfica e algébrica, tendo-se promovido uma conexão entre os domínios de Geometria e Funções.

Referências

- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Canavarro, A. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Revista Educação & Matemática*, 115, 11-17.
- Creswell, J. W. (2012). *Educational Research, Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research*. (4th ed.). Boston: Pearson.
- Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artefacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2. Cases and perspectives* (pp. 363–448). Charlotte, NC: Information Age.
- Freire, P. (2000). *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. (15.ª ed.) São Paulo: Paz e Terra.
- Lopes, L., & Domingos, A. (2015). A utilização da calculadora gráfica no currículo do ensino básico: uma experiência no 8º ano. *Educação e Matemática*, 131, 45-48.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (2017). *Princípios para a Ação - Assegurar a Todos o Sucesso em Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Obra original publicada em 2014).

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438–445.

MARIA MANUELA SUBTIL

ESCOLA BÁSICA 20, 30 CICLOS FRAGATA DO TEJO; UIED, UNIDADE DE INVESTIGAÇÃO EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO

ANTÓNIO DOMINGOS

CICS.NOVA – CENTRO INTERDISCIPLINAR DE CIÊNCIAS SOCIAIS
UIED, UNIDADE DE INVESTIGAÇÃO EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO
DCSA, DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS - FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Nota: Este trabalho é suportado por fundos nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia, I.P., no contexto do projeto PTDC/CED-EDG/32422/2017

GRUPO T3 - APM

“O Grupo T3-APM, disponibiliza na página da APM um conjunto de recursos (propostas de atividades, resoluções, ficheiros para a TI, vídeos /webinars), como os que se seguem, que esperamos poderem transformar-se em desafios interessantes para a aula de Matemática”.