

Articulando Matemática A e Aplicações Informáticas: Iterações, o Método das Bisseções sucessivas e o Teorema de Bolzano-Cauchy

ANA ISABEL CUNHA

CRISTINA CRUCHINHO

MARIA JOSÉ CARVALHO

A autonomia das escolas permite-lhes “dispor de maior flexibilidade na gestão curricular, com vista à dinamização de trabalho interdisciplinar, de modo a aprofundar, reforçar e enriquecer as Aprendizagens Essenciais” (Decreto-Lei n.º 55/2018). A articulação das diferentes disciplinas em detrimento de um conhecimento fragmentado, permite desenvolver competências como o raciocínio e a resolução de problemas e o pensamento crítico e o pensamento criativo, centrais no Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória.

As aprendizagens tornam-se significativas quando integradas num contexto real de aplicação, conjugando saberes que se mobilizam com sentido na abordagem interdisciplinar do currículo. Esta visão global que combina as várias áreas curriculares induz a agregação do conhecimento enquanto ferramenta fundamental para a resolução de problemas no concreto. Mais do que acumular informação, importa que o aluno seja capaz de relacionar construindo saberes de forma crítica que aplicará em contexto e não como uma mera reprodução.

Este texto pretende contribuir para a reflexão sobre estas questões, ilustrando a concretização de uma experiência de interdisciplinaridade na Escola Secundária Filipa de Vilhena e apontando para implicações e eventuais atividades futuras.

INTERDISCIPLINARIDADE

Quando se fala em interdisciplinaridade rapidamente surgem questões como «nas escolas é possível realmente fazer interdisciplinaridade? De que forma?». Contudo, é igualmente importante e pertinente perguntarmo-nos sobre «porque é que é importante a articulação curricular? O que podem desta forma os alunos aprender e que atitudes podem desenvolver?»

As práticas de articulação curricular reconhecem que os desafios do presente e do futuro necessitam de uma utilização interdisciplinar dos conhecimentos, de uma construção contínua do saber, que vai muito além da difusão de informação. Note-se que o acesso à informação é quase tão simples e imediato quanto assustador, mas o tratamento dessa informação de forma crítica e consciente não é trivial. Para se saber estar na atual sociedade, é preciso aprender: aprender a conhecer,

aprender a fazer, aprender a viver com os outros e aprender a ser. Nesta perspetiva, a educação deve coexistir ao longo de toda a vida e deve procurar um equilíbrio entre o conhecimento, a compreensão, a criatividade e o sentido crítico.

Respeitando as singularidades de cada disciplina, deve procurar-se desenvolver competências transversais comuns, a partir do trabalho que ocorre nas diferentes áreas. As disciplinas e as respetivas áreas não são autossuficientes e como tal o trabalho colaborativo entre elas, para além do realizado nos laboratórios e nas bibliotecas, é também essencial na escola. A articulação horizontal entre os conhecimentos das várias disciplinas permite integrar visões de um mesmo assunto sob diferentes ângulos, promovendo uma compreensão mais ampla e, conseqüentemente, melhores aprendizagens e o desenvolvimento de competências mais complexas. Claro que tal exige que o currículo, encarado como ferramenta para promover o sucesso escolar, seja organizado e gerido de forma consciente e ponderada. Numa lógica de trabalho colaborativo, devem ser organizadas equipas multidisciplinares para organizar um percurso de ensino e aprendizagem orientado por objetivos claros e que seja tão adequado quanto possível aos alunos ou turma em causa.

As atividades e os projetos de interdisciplinaridade devem assim ser planeados nesta linha de pensamento, com o intuito de:

- Consolidar, aprofundar e enriquecer as aprendizagens essenciais;
- Desenvolver competências através da mobilização e articulação de conhecimentos das várias disciplinas com vista à resolução de problemas;
- Implementar metodologias centradas no aluno, ator principal no processo de aprendizagem, potenciando aprendizagens significativas.

A planificação passa, numa primeira fase, por identificar as aprendizagens essenciais que são comuns ou que estabelecem relações entre as várias disciplinas ao nível dos conhecimentos, capacidades e atitudes. Com o propósito de desenvolver as competências identificadas, podem ser desenhados projetos ou atividades que as trabalhem em articulação prática, potenciando a assimilação das aprendizagens.

Conceber a integração de aprendizagens essenciais, comuns ou relacionadas, ganhará relevância se planificada para dar resposta a uma questão-problema pensada conjuntamente e cuja resolução implicará um processo articulado de construção ativa de conhecimento e capacidades.

A concretização e a monitorização da atividade delineada permitirão depois avaliar os resultados em função daquelas que eram as suas finalidades. Parte desta avaliação passa por refletir no sentido de procurar melhorar a atividade, fazendo as alterações que se acharem convenientes. Este desafio de contínua planificação, concretização e avaliação da atividade é crucial neste processo de gestão do currículo de forma integrada e contextualizada. No esquema (figura 1) encontra-se representado este processo em que a prática docente assenta.

A constante ação-reflexão é de facto necessária para a conceptualização das estratégias pedagógicas, que se pretendem concretizadas e reajustadas a cada grupo-turma e ao currículo que se pretende veicular.



Figura 1. Estratégia pedagógica

RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA NA ESCOLA FILIPA DE VILHENA

O trabalho que relatamos neste texto surgiu no contexto de uma atividade de interdisciplinaridade com a turma A do 12.º ano da Escola Secundária Filipa de Vilhena no ano letivo 19/20, levada a cabo pelas três autoras do texto: Maria José, diretora de turma e professora de Aplicações de Informática (API) do 12ºA; Cristina Cruchinho, professora de Matemática A do 12ºA e orientadora de estágio de Ana Isabel; Ana Isabel, a frequentar o Mestrado em Ensino da Matemática para o 3º ciclo do ensino básico e ensino secundário, na FCUP.

Na abertura do ano letivo, dinamizado pela direção da escola, decorreram reuniões com os professores de cada ano de escolaridade com o objetivo de analisarem as aprendizagens essenciais, num caminho de reflexão, interiorização e discussão das mesmas. Num ambiente de trabalho colaborativo e com vista a promover o trabalho interdisciplinar, foram discutidas propostas de articulação dos conteúdos das várias disciplinas, sugeridas pelos professores, que elaboraram documentos por ano de escolaridade.

Neste âmbito, foi sugerida e aprovada uma atividade interdisciplinar entre Matemática A e Aplicações Informáticas (API) que consistia na implementação em C++ do método das

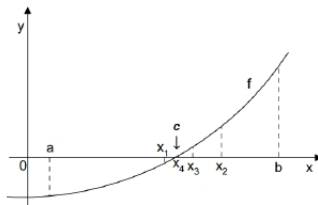
bisseções sucessivas, em articulação com o Teorema de Bolzano-Cauchy. O currículo das duas disciplinas cruzaria as estruturas de repetição (ciclos iterativos) implementadas na linguagem de programação C++ e o Teorema de Bolzano-Cauchy, numa abordagem conjunta.

Em primeiro lugar, os alunos trabalharam o Teorema de Bolzano-Cauchy e só mais tarde, já no 2.º período, deram início ao estudo das estruturas de repetição em API. Estando a lecionação dos conteúdos programáticos necessários numa fase adequada, reuniram-se condições para implementar a atividade interdisciplinar. Próximo da sua data de implementação, que viria a ser a 7 de fevereiro, as professoras reuniram para elaborar uma planificação da atividade a curto prazo, tendo elaborado um documento suporte para auxiliar o desenvolvimento da aula interdisciplinar, que se encontra representado na figura 2.

 Bom Trabalho!	ESCOLA SECUNDÁRIA FILIPA DE VILHENA Disciplinas de Aplicações Informáticas e Matemática A 12º Ano de Escolaridade
--	--

Método das bisseções sucessivas

Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$ tal que $f(a) \times f(b) < 0$.
Designemos por $c \in]a, b[$ um zero desta função. Observa a figura:



Dividindo o intervalo $[a, b]$ segundo o seu ponto médio, obtém-se x_1 . Passa a existir dois subintervalos $[a, x_1]$ e $[x_1, b]$ a ser considerados. Se $f(x_1) = 0$ então já encontramos o zero da função. Caso contrário, o zero da função encontra-se num dos dois subintervalos. Calculando a imagem de x_1 conseguiremos perceber em qual dos subintervalos estará. Porquê?

Podemos repetir este processo até que se obtenha uma aproximação para c , com um certo erro, fazendo um número maior ou menor de iterações.

Algoritmo:
Repetimos enquanto $b - a > \text{erro}$:

- Calculamos o ponto médio do intervalo: $m \rightarrow \frac{a+b}{2}$
- Calculamos valor $\rightarrow f(a) \times f(m)$:
 - Se valor = 0 então o zero da função é m .
 - Caso contrário, se valor < 0 então o zero da função está em $[a, m]$: $b \rightarrow m$
 - Caso contrário, se valor > 0 então o zero da função está em $[m, b]$: $a \rightarrow m$

Vamos programar!
Considera a função f real de variável real definida por

$$f(x) = x^2 - 5x + 2$$

Sabe-se que f tem um zero no intervalo $[0,1]$. Elabora um programa que te permita encontrar o zero de f com um erro de 0.01 e com um erro de 0.001.

Figura 2. tarefa proposta

A atividade foi planeada para duas aulas de 50 min, numa sala com computadores e passando pelos seguintes momentos:

- apresentação do método das bisseções sucessivas e associação com o Teorema de Bolzano-Cauchy;
- interpretação do problema ao nível da programação – estruturação do algoritmo e posterior implementação na linguagem C++
 - definição do objetivo do programa

- b. definição das variáveis necessárias e respetivos tipos de dados
 - c. operações a realizar – estruturas de controlo e de repetição
 - d. apresentação do resultado
3. programação do método das bisseções sucessivas aplicado a uma função e intervalo, pelos alunos e nos respetivos computadores.

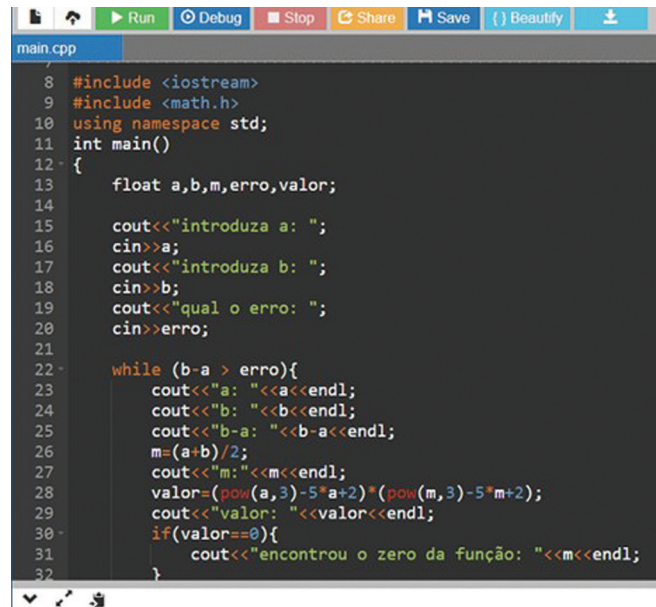
Antes da realização da aula interdisciplinar, Ana assistiu a uma das aulas de API do 12ºA, onde teve oportunidade de conhecer mais proximamente o trabalho dos alunos em programação, constatando o interesse e as dificuldades que tinham na implementação das suas ideias. Durante essa aula, um grupo de alunas explicou e mostrou a Ana um jogo em que o jogador tem como adversário o computador. Este gera um número inteiro aleatório num certo intervalo e o jogador vai gastando tentativas para adivinhar esse número, sendo que após cada tentativa o computador lhe indica se o número certo é inferior ou superior ao seu palpite. O raciocínio subjacente ao algoritmo pressupunha exatamente o método iterativo controlado por condições (usando a lógica de Boole) e aproximações sucessivas, o que ia ao encontro da tarefa que iam realizar na aula interdisciplinar.

A aula interdisciplinar ocorreu durante dois tempos letivos de matemática, onde, contrariamente ao planificado, estava apenas disponível um computador, o da mesa do professor, uma vez que não foi possível requisitar uma sala de informática. Este facto obrigou a uma adaptação da metodologia inicialmente prevista, decorrendo todo o trabalho em grande grupo.

Assim, a aula iniciou-se com a apresentação do método das bisseções sucessivas, dinamizada por ambas as professoras. De seguida, o desafio proposto aos alunos – implementação do método das bisseções sucessivas – começou a ser analisado do ponto de vista da programação, partindo da questão “Será que conseguimos elaborar um programa que nos permita encontrar o zero de f com um erro de 0.01 e com um erro de 0.001?”

O desenvolvimento do algoritmo foi sucedendo naturalmente, solicitando-se aos alunos a mobilização do que já conheciam das aulas de programação, mas num contexto de aplicação concreto. Definiram-se variáveis, construiu-se a estrutura de repetição com base na condição $b-a > \text{erro}$ e testaram-se sucessivamente os valores de $f(a)$ e $f(b)$ com a estrutura condicional `if...else` em aproximações sucessivas ao zero da função dada. Conseguiram ainda extrapolar o conceito de função em C++, otimizando o algoritmo e tornando o programa mais eficiente.

Um aluno voluntariou-se para escrever o código (figura 3) enquanto este era construído com a colaboração da turma. Na fase final da aula foi testado o programa para encontrar um zero de uma dada função, que se sabia *a priori* existir num determinado intervalo (figura 4). Foi ainda abordada a questão dos erros cometidos nas aproximações a que o programa permitia aceder e sobre como obter valores sucessivamente mais próximos do valor exato.

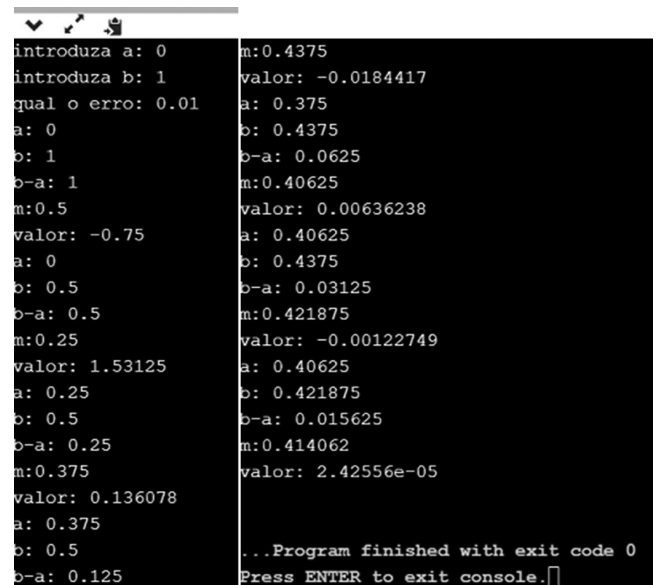


```

8 #include <iostream>
9 #include <math.h>
10 using namespace std;
11 int main()
12 {
13     float a,b,m,erro,valor;
14
15     cout<<"introduza a: ";
16     cin>>a;
17     cout<<"introduza b: ";
18     cin>>b;
19     cout<<"qual o erro: ";
20     cin>>erro;
21
22     while (b-a > erro){
23         cout<<"a: "<<a<<endl;
24         cout<<"b: "<<b<<endl;
25         cout<<"b-a: "<<b-a<<endl;
26         m=(a+b)/2;
27         cout<<"m: "<<m<<endl;
28         valor=(pow(a,3)-5*a+2)*(pow(m,3)-5*m+2);
29         cout<<"valor: "<<valor<<endl;
30         if(valor==0){
31             cout<<"encontrou o zero da função: "<<m<<endl;
32         }
33     }
34 }

```

Figura 3. Excerto do programa “Método das bisseções sucessivas”



```

introduza a: 0      m:0.4375
introduza b: 1      valor: -0.0184417
qual o erro: 0.01   a: 0.375
a: 0                b: 0.4375
b: 1                b-a: 0.0625
b-a: 1              m:0.40625
m:0.5               valor: 0.00636238
valor: -0.75        a: 0.40625
a: 0                b: 0.4375
b: 0.5              b-a: 0.03125
b-a: 0.5            m:0.421875
m:0.25              valor: -0.00122749
valor: 1.53125      a: 0.40625
a: 0.25             b: 0.421875
b: 0.5              b-a: 0.015625
b-a: 0.25           m:0.414062
m:0.375             valor: 2.42556e-05
valor: 0.136078    a: 0.375
a: 0.375            b: 0.5
b: 0.5              ...Program finished with exit code 0
b-a: 0.125          Press ENTER to exit console.

```

Figura 4. Execução do programa “Método das bisseções sucessivas”

A intenção inicial era fomentar a construção ativa de aprendizagens permitindo que os alunos, após a apresentação do método das bisseções sucessivas e a sua análise, tentassem implementar o código em trabalho de pares e com alguma apropriação do método que se apresentou. Porém, apenas alguns alunos participaram ativamente nesta atividade, o que consideramos ter sido influenciado pelo facto de os alunos não terem os seus computadores de trabalho, como tínhamos planeado.

O PONTO DE VISTA DOS ALUNOS

Foi realizado um questionário com o objetivo de compreender o modo como os alunos sentiram a aula interdisciplinar e em que medida consideraram oportuna ou não esta articulação.

Os alunos consideraram que aula foi bem articulada e afirmaram que gostariam de ter mais aulas com articulação curricular. Expressaram ainda que:

Pude aprender mais sobre programação.

Por articular disciplinas distintas levou com que acabássemos por nos sentir cativados sobre como duas matérias que aparentemente não têm nada em comum, se conjugarem perfeitamente.

Ter melhor a noção de que duas diferentes matérias podem sim estar relacionadas e, assim, ter uma outra perspectiva sobre um conteúdo.

CONCLUSÃO E IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA LETIVA

A atividade que implementamos tinha como objetivo que os alunos apreendessem a complexidade da situação apresentada – o método das bissecções sucessivas – e a interiorizassem articulando os seus conhecimentos e competências das duas disciplinas envolvidas. O cruzamento de saberes e de opiniões diversas podia assim contribuir para uma interpretação mais sólida e uma compreensão mais ampla da situação.

No sentido de avaliar o trabalho, tínhamos intenção de propor uma questão aos alunos sobre o método das bissecções sucessivas, com o intuito de compreender que significado tinham atribuído ao método e que articulação faziam com o teorema de Bolzano-Cauchy. Também, já estávamos a delinear com outra turma a implementação inicialmente prevista, em que cada par de alunos elaborasse um programa no seu computador. Estas atividades não foram levadas a cabo devido ao fecho das escolas a 13 de março devido à atual situação de pandemia por Covid-19.

Tendo em conta que os alunos aprendem mais significativamente quando trabalham em grupo, explorando e discutindo as suas ideias com os pares, pensamos implementar esta metodologia numa implementação futura.

Nesse sentido, a atividade pode ser concretizada num projeto interdisciplinar de Matemática A e Aplicações Informáticas, com uma duração prolongada no tempo. Lançando como questão/problema “Como encontrar o zero de uma função com um erro de $x \dots$ ”, dar-se-ia início a uma estratégia de ensino construtivista e centrada no aluno. Organizados em grupos, os alunos seriam desafiados a investigar o método das bissecções sucessivas e mais tarde, com as ferramentas e competências adquiridas em API, iriam procurar forma de o implementar. Além de compreender, explicar e implementar o método, os alunos seriam ainda estimulados a investigar o erro cometido nas aproximações obtidas e a sua relação com o número de iterações realizadas, além de elencar potencialidades deste método. O culminar deste trabalho poderia ser um relatório escrito por cada grupo e/ou uma apresentação, sujeitos a avaliação pelas duas disciplinas. O resultado/solução encontrado pelos alunos deveria ser partilhado com a comunidade em que se inserem, pelo que propomos igualmente sessões de apresentação e debate com outras turmas do mesmo nível de escolaridade e o mesmo currículo.

Esta conceção de aprendizagem dialógica, baseada no diálogo e na interação, está claramente relacionada com o funcionamento da sociedade em que vivemos. Também a aprendizagem depende cada vez mais das interações que os alunos têm com as pessoas que os rodeiam e na multiplicidade de espaços de aprendizagens e desenvolvimento. Nesta perspetiva de ensino-aprendizagem encontram ferramentas essenciais para a construção de novos conhecimentos.

Será válido mantermos a segmentação do currículo e do conhecimento, ignorando o que muda à nossa volta? Por vezes, privilegia-se o trabalho individualizado e a instrução, não valorizando devidamente uma aprendizagem com significado e capaz de permitir a aquisição de competências pessoais e profissionais. O caminho é, sem dúvida alguma, a aposta no trabalho colaborativo e na exploração do conhecimento através da descoberta autónoma de soluções para problemas reais que mobilizem o currículo a aprender.

ANA ISABEL CUNHA

CRISTINA CRUCHINHO

MARIA JOSÉ CARVALHO

ESCOLA SECUNDÁRIA FILIPA DE VILHENA

XXIII ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES



MATEMÁTICA NOS PRIMEIROS ANOS é o encontro nacional promovido pela Associação de Professores de Matemática especialmente dedicado a docentes da educação Pré-Escolar e dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico; acolhe também estudantes da formação inicial.

O Encontro será realizado online a 7 de novembro de 2020.

Mais informações e inscrições na página da APM, www.apm.pt.