

Resolução de problemas, geometria dinâmica e dissecções

Vale a pena revisitar com regularidade os escritos mais significativos sobre a resolução de problemas e associar ideias apresentadas a resoluções realizadas por alunos em situações de aprendizagem.

Neste caso, o ponto de partida é um problema de geometria proposto aos alunos de Geometria da Licenciatura em Educação Básica na ESE de Lisboa. O problema era opcional, entre outros problemas, e foi escolhido por seis alunas. Esta situação foi proposta no fim de um trabalho muito intenso de resolução de tarefas com recurso a geometria dinâmica.

Quem gosta de resolver problemas de geometria não dispensa o recurso a um ambiente de geometria dinâmica para os resolver. Implicitamente, um recurso desta natureza permite colocar em ação uma das estratégias de Polya para a resolução de problema. Esta estratégia consiste em partir de um caso particular ou de uma restrição e procurar construir a solução a partir de uma resolução parcial.

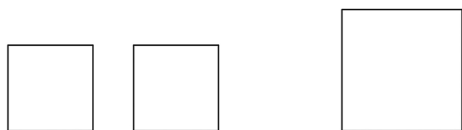
O problema

Novos lenços de pescoço

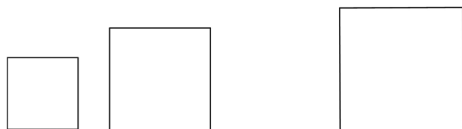
Com 2 pequenos lenços iguais e quadrados pretende-se obter um novo lenço quadrado.

O objetivo é aumentar o tamanho perdendo o mínimo de tecido. Isto é, só se pode perder tecido nas costuras que vão ter que ser feitas. Por isso, o número de cortes e o comprimento das costuras a fazer têm que ser minimizados.

Qual é a melhor solução para obter um novo lenço?



E se os lenços tiverem tamanhos diferentes?



Este problema é um problema matemático muito conhecido, no entanto, o seu contexto é original e, a meu ver, revelou-se como fundamental para a compreensão do problema e para a sua resolução.

RESOLUÇÕES DA 1ª PARTE DO PROBLEMA

A primeira parte é de resolução acessível. Foram apresentadas pelas seis alunas duas resoluções distintas (figuras 1 e 2).

Recordando que uma dissecção geométrica é um corte de uma ou mais figuras geométricas em várias peças que depois podem ser rearranjadas para formar outra ou outras figuras, temos

aqui dois bons exemplos de dissecções geométricas. Em ambos os casos a geometria dinâmica permite verificar que ambas são independentes das dimensões dos quadrados iniciais. Além disso, a geometria dinâmica favorece a curiosidade de saber o que acontece se os quadrados iniciais não forem iguais.

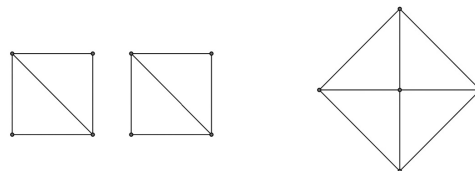


Figura 1

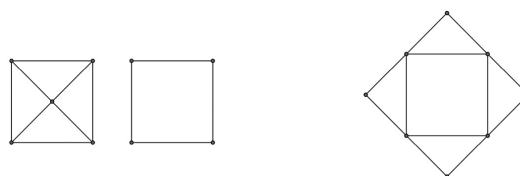


Figura 2

RESOLUÇÕES PARTICULARES DA 2ª PARTE DO PROBLEMA

Para a 2ª parte selecionei três das seis resoluções distintas realizadas pelas alunas. Uma delas foi construída com recurso a uma decomposição do quadrado maior em 4 triângulos retângulos equiláteros iguais. Esta solução foi obtida a partir da exploração da situação com recurso ao geogebra. A solução é particular e só é possível se o lado do quadrado maior for o dobro do lado do quadrado menor (figura 3).

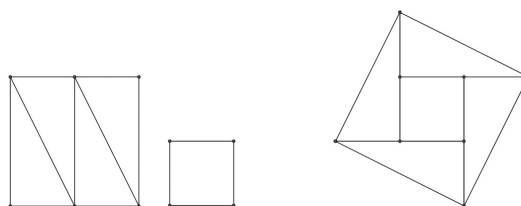


Figura 3

Outra solução particular recorre à decomposição do quadrado maior em 4 retângulos iguais. Esta solução também é obtida com recurso ao geogebra e só funciona se o lado do quadrado menor for 3/4 do lado do quadrado maior (figura 4).

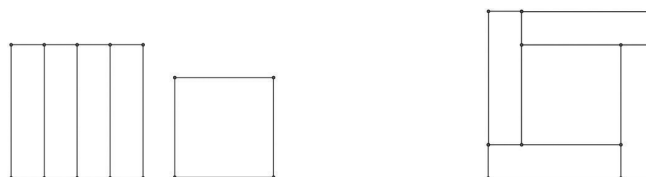


Figura 4

Um das resoluções obteve uma solução geral. Neste caso a estratégia contempla uma ideia diferente que consiste em colocar os dois quadrados iniciais justapostos e pensar os cortes mantendo essa justaposição (figura 5).

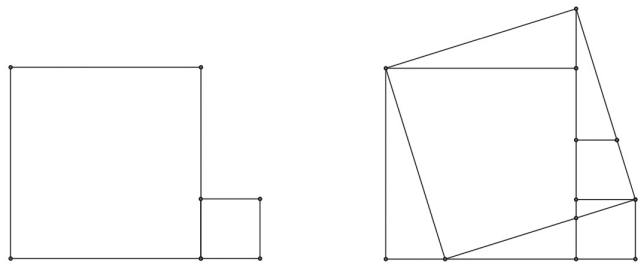


Figura 5

Esta estratégia é perfeita e generalizável para qualquer relação entre os lados dos dois quadrados iniciais. Esta estratégia é conhecida como disseção de Paul Mahlo, sendo a sua referência histórica de 1908 (Frederickson, 1997). Um outro aspeto muito relevante a evidenciar é que a construção dinâmica desta solução permite incluir a solução da 1ª parte do problema como caso limite (figura 6).

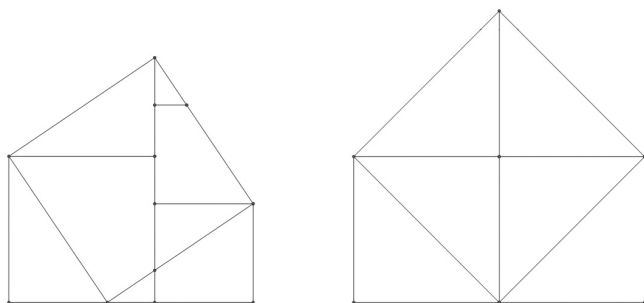


Figura 6

Estas três resoluções foram escolhidas porque nos ajudam a discutir algumas ideias relevantes e é importante registar que apenas esta última resolução apresenta uma solução geral.

ALGUMAS REFLEXÕES

Nesta resolução de solução generalizável destaco dois aspetos presentes na descrição apresentada pela aluna. Estes dois aspetos são a utilização das ferramentas da geometria dinâmica e a influência do contexto.

A utilização das ferramentas da geometria dinâmica percorre toda a descrição em apontamentos do tipo: “apliquei uma translação”, “apliquei uma rotação”. Ao longo da descrição, a aluna identifica corretamente os elementos fundamentais da figura e usa uma linguagem formal, embora às vezes com falhas. Selecciono um excerto um pouco mais longo.

“Por fim percebi que o pedaço que faltava para construir o quadrado grande era o quadrilátero BJKL e portanto apliquei-lhe uma rotação de 90 graus no sentido horário e depois uma translação pelo vetor v obtendo assim a restante parte da aresta que faltava.”

Destaco este excerto porque nele também está subjacente a referência ao contexto do problema quando a aluna refere “o

pedaço que faltava”. Aliás esta referência ao contexto está presente em várias afirmações que a aluna faz, como por exemplo:

“Podemos ligar estes triângulos ao outro lenço através das arestas.”

“Assim foi possível obter o quadrado maior $K'K'1K'2K'3$, que representa o lenço grande, apenas com 4 cortes num dos lenços.”

“Obtive assim o quadrado maior final $ID'FK$ ” apenas com dois cortes no quadrado maior e um no mais pequeno.”

A própria referência a “arestas”, errada na perspectiva geométrica formal, pode ser influenciada pelo contexto pois a palavra “arestas” faz parte da linguagem corrente e não está totalmente associada a situações tridimensionais.

Na análise que faço, considero que a existência de um contexto familiar, a costura dos lenços, foi facilitadora da resolução e conjeturo que foi decisiva para que esta aluna obtivesse uma solução perfeita. A ideia chave nesta resolução foi a justaposição inicial dos dois quadrados originais. Na minha análise, a ideia de justapor os dois quadrados decorre do contexto de costura do problema. A aluna revela essa compreensão ao combinar sistematicamente a linguagem matemática formal com a linguagem informal do contexto do problema.

Do ponto de vista matemático, nos problemas sobre disseções, uma das estratégias poderosas de resolução consiste precisamente na justaposição das figuras de partida.

É interessante destacar também que outras resoluções apresentadas, embora não tão perfeitas como esta, também referem o contexto, como por exemplo:

“Deste modo é possível concluir que esta forma pode ser generalizada para todos os lenços de tamanhos diferentes, estando sempre no centro o lenço de menores dimensões e em torno deste os quatro triângulos isósceles, correspondentes ao lenço de maiores dimensões.”

Esta solução diz respeito a uma outra resolução em que a aluna não respeita o conceito de disseção. Porém encontra uma solução geral aceitável na perspectiva do contexto do problema.

Esta breve discussão pretende relacionar algumas ideias relevantes sobre a resolução de problemas, a geometria dinâmica e as disseções geométricas. Nesta discussão foram valorizados o papel da geometria dinâmica e do contexto do problema. Porém, vários outros aspetos ficaram por discutir ligados às possibilidades que este problema oferece para a formulação de novos problemas e para a reflexão e aprendizagem sobre a resolução de problemas na formação de futuros professores. As resoluções das alunas confirmam estas potencialidades e deixam-nos várias questões em aberto.

Referências

- Frederickson, Greg N. (1997). *Dissections: Plane & Fancy*. Cambridge University Press.
- Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Gradiva.