

Di-vi-so-res – como encontrá-los? Uma experiência exploratória no 1.º ciclo do ensino básico

FÁTIMA ALEXANDRINO
GORETE FONSECA

As orientações curriculares têm vindo a assumir cada vez mais como prioridade a promoção da qualidade das aprendizagens de todos os alunos. Espera-se que o professor no desenvolvimento da sua prática profissional, adote estratégias para ajudar o aluno a: (i) tomar consciência do que deve aprender; (ii) saber quais os processos cognitivos a ativar para adquirir esse conhecimento; e (iii) mostrar o que aprendeu de modo articulado e integrado (ME, 2017) valorizando, assim, o papel ativo do aluno na aprendizagem. Diversos autores vêm chamando à atenção para a importância da adoção de estratégias de ensino e de aprendizagem, da matemática, baseadas na prática de ensino exploratório (*inquiry-based teaching*) (Canavarro, 2011; Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012; Ponte, 2005) de modo a dar oportunidades aos alunos para realizar “tarefas matemáticas significativas que lhes permitam raciocinar matematicamente sobre ideias importantes e atribuir sentido ao conhecimento matemático que surge a partir da discussão coletiva dessas tarefas” (Canavarro et al., 2012, p. 256).

Sabemos que a tarefa como ponto de partida para a aprendizagem na sala de aula deve assumir um caráter sistemático e deve ainda promover nos alunos a reflexão, a partilha e a discussão em pequeno ou grande grupo. A discussão, enquanto momento que permite aos alunos expressar o seu pensamento, para além de dar a oportunidade para analisar, comparar e confrontar as diferentes resoluções apresentadas, contribui para estabelecer conexões e institucionalizar, através da generalização, conhecimento matemático novo (Canavarro, 2011; Ponte, 2005, 2014).

A natureza do trabalho exploratório descritivo interpretativo de que se faz relato neste artigo consubstancia a aplicação de uma tarefa aberta que incidiu sobre o tópico dos divisores. Pretendeu-se, a partir dos registos dos alunos, conhecer as estratégias usadas para resolver a tarefa. Importa dizer que a tarefa integrou um conjunto mais amplo de atividades exploratórias desenvolvidas no âmbito de um projeto que visava a melhoria da qualidade das aprendizagens dos alunos matriculados no 1.º ciclo do Agrupamento de Escolas da Lourinhã.

Nesta atividade participaram 11 docentes e 104 alunos, que à data da realização da tarefa exploratória, frequentavam o quarto ano de escolaridade distribuídos por 9 turmas das diferentes escolas do 1.º ciclo que integram o Agrupamento.

Para o efeito, recorreu-se aos trabalhos produzidos pelos alunos e às notas de observação direta recolhidas pelos docentes como fontes privilegiadas na recolha de dados. Os dados foram analisados recorrendo a processos de análise de conteúdo.

Seguidamente são apresentados os objetivos da tarefa, os segmentos didáticos previstos e o modo de trabalho dos alunos.

A TAREFA

A tarefa teve como principais objetivos: (i) identificar divisores de um número natural; (ii) dar exemplos de divisores de um número natural; e (iii) compreender que os divisores de um número são divisores dos seus múltiplos (e que os múltiplos de um número são múltiplos dos seus divisores).

Como competências transversais pretendeu-se que os alunos fossem capazes de: (i) utilizar os conhecimentos e as capacidades para resolver problemas em contextos diversos; (ii) resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos; e (iii) discutir processos matemáticos, explicitando-os e justificando-os.

A implementação da tarefa decorreu numa aula de 90 minutos e respeitou os segmentos indicados na tabela 1.

Tabela 1. Segmentos previstos para a aula e duração aproximada

Segmentos	Tempo
1. Apresentação da tarefa	10 minutos
2. Trabalho autónomo	50 minutos
3. Discussão	20 minutos
4. Síntese final	10 minutos

O enunciado da tarefa procurou levar os alunos a refletir sobre o modo como se podem descobrir os divisores de um dado número. A partir de uma situação problemática “A Maria quer distribuir 48 bombons por várias embalagens. Ela não quer que sobre nenhum e todas as embalagens têm de ter o mesmo número de bombons.” foram colocadas as seguintes questões:

- “Se colocar em cada embalagem 8 bombons, quantas embalagens serão necessárias?”;
- “E se for em 4 embalagens?”
- “Será possível guardar os bombons em 5 embalagens? Justifica a tua resposta.”

Na segunda parte do enunciado foi colocado um desafio: “*Tenta descobrir outras possibilidades para arrumar os bombons tendo todas as embalagens o mesmo número. Procura arranjar uma estratégia de modo a registares todas essas possibilidades.*”

De seguida, uma segunda questão pedia para encontrar todas as possibilidades de embalar, com os mesmos princípios, 60 bombons. Concluídas estas questões houve um momento de partilha e de definição de algumas conclusões em grupo turma. Para aferir se houve aprendizagem e testar a aplicação do conhecimento a ficha tinha uma última questão para descobrirem os “divisores de 20 e de 40”.

A tarefa foi resolvida essencialmente a pares e em grande grupo no respetivo enunciado. Após a implementação da tarefa foram recolhidos os enunciados com as respostas dadas pelos alunos, o testemunho oral e uma pequena reflexão dos professores que a aplicaram. Estes dados foram, posteriormente, analisados procurando sobretudo categorizar as estratégias utilizadas pelos alunos, mas também identificar as aprendizagens efetuadas. É essa análise que partilhamos de seguida.

ESTRATÉGIAS EXPLICITADAS PELOS ALUNOS

Consideradas as múltiplas estratégias utilizadas pelos alunos, expostas nas suas respostas, a propósito das questões colocadas, optamos por agrupá-las de acordo com a operação matemática utilizada, quando esta foi evidenciada. Essas estratégias estão relacionadas com a representação mental que os alunos fazem das situações apresentadas podendo corresponder a estádios de desenvolvimento diferenciado. Assim, apresentamo-las seguindo uma lógica que definimos como das menos elaboradas, em termos de desenvolvimento do raciocínio e da linguagem matemática, para as que revelam um maior domínio nesta área, sendo a sua eficiência também ponderada.

Representação icónica (desenho)

O recurso à representação icónica associada a uma operação, nomeadamente a multiplicação (mas também a divisão), foi a estratégia utilizada por mais de 50% dos alunos participantes. A observação das respostas categorizadas neste grupo faz-nos acreditar na ideia de que estes utilizaram as operações como um reforço da explicitação da solução/resposta encontrada (figura 1) e não como a primeira estratégia. Parece ser necessário primeiro concretizar a viabilidade da solução recorrendo ao desenho para depois de *visualizada* a possibilidade ensaiada, confirmar com a operação.

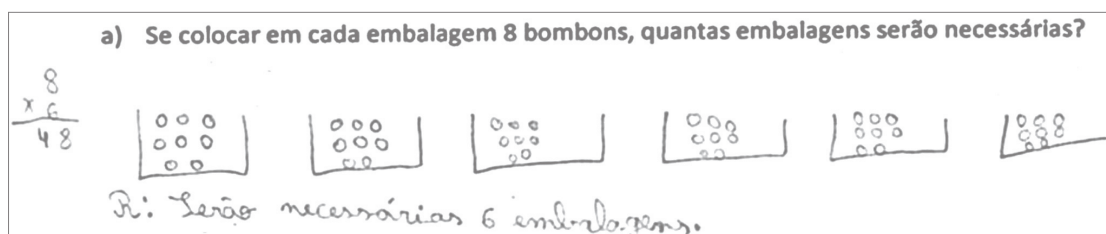


Figura 1. Resolução produzida com recurso ao desenho e à multiplicação

Adições sucessivas

Um grupo reduzido de alunos (menos de uma dezena) usou a adição como estratégia para comunicar a solução encontrada para a questão 1. A maioria desses alunos apresentou uma adição correta, de parcelas iguais, tipo: “ $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 48$ ” para justificar o seu raciocínio. A mesma estratégia foi utilizada como solução da questão 2 da tarefa, como podemos observar na figura 2.

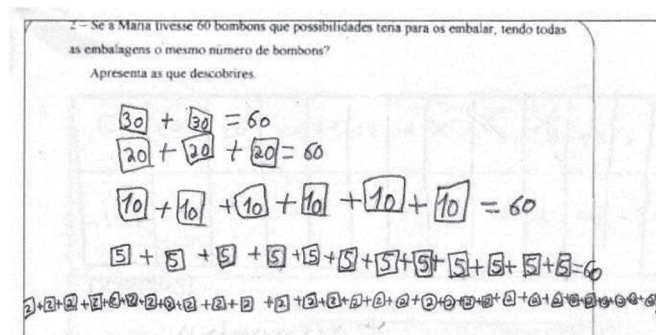


Figura 2. Resolução produzida com recurso à adição

O recurso ao raciocínio aditivo é uma das etapas iniciais aquando da exploração do sentido da operação da multiplicação, pelo que consideramos estarmos na presença de uma estratégia de resolução de nível inicial, tal como no recurso à representação icónica.

Multiplicação

Uma estratégia largamente utilizada para responder às questões colocadas foi o recurso ao raciocínio multiplicativo. Enquanto o raciocínio aditivo envolve grandezas de um mesmo universo, o multiplicativo envolve duas grandezas de naturezas distintas, sendo mais complexo neste sentido. A existência de uma relação fixa entre duas variáveis é a essência deste raciocínio, no sentido em que a situação multiplicativa envolve duas quantidades em relação constante entre si.

Mais de metade dos alunos participantes construiu a tabuada até chegar ao número dado como a quantidade a partilhar, servindo esta como estratégia de resolução (figura 3), numa ou mais questões.

Relativamente à questão: *Será possível guardar os bombons em 5 embalagens. Justifica a tua resposta?* a quase totalidade (mais de 95%) dos alunos conseguiu apresentar uma justificação plausível manifestando ter compreendido o enunciado. Os

exemplos seguintes parecem-nos ilustrativos: “Não, porque ficam duas embalagens com um a menos.”; “Não, porque sobram bombons.” ou “Não, porque sobram 3 bombons.”

b) E se for em 4 embalagens?

$4 \times 1 = 4$ $4 \times 7 = 28$ R: Serão necessárias 12 embalagens.
 $4 \times 2 = 8$ $4 \times 8 = 32$
 $4 \times 3 = 12$ $4 \times 9 = 36$
 $4 \times 4 = 16$ $4 \times 10 = 40$
 $4 \times 5 = 20$ $4 \times 11 = 44$
 $4 \times 6 = 24$ $4 \times 12 = 48$

Figura 3. Resolução produzida com recurso à construção da tabuada

Alguns alunos utilizaram a palavra *tabuada* ou *multiplicação*, ou mesmo o seu registo, para a justificação, como podemos observar na figura 4.

$5 \times 8 = 40$
 $5 \times 9 = 45$
 $5 \times 10 = 50$
 R: Não porque na tabuada 5 não existe o número 48.

Figura 4. Resolução produzida com recurso à tabuada

De entre os alunos que usaram esta estratégia, um subgrupo indicia ainda ter compreendido que a divisão teria de ser exata, expressando o seu pensamento de modo explícito: “Não, porque o resto não foi zero.”

O recurso à multiplicação foi igualmente utilizado por um grupo de alunos mais restrito que demonstrou possuir um conhecimento muito claro do conceito de divisores e de que estes se podem encontrar aos pares, tornando explícita essa justificação. A comunicação matemática utilizada nas suas respostas explicita o que o recurso à multiplicação significou na sua estratégia de descoberta dos divisores: “A possibilidade que eu arranjei foi meter em 2 embalagens com 24 bombons cada uma, porque $2 \times 24 = 48$. Encontrei 2 divisores: 2, 24. A possibilidade que eu arranjei foi meter em 1 embalagem com 48 bombons cada uma, porque $1 \times 48 = 48$. Encontrei 2 divisores: 1, 48.” Esta comunicação foi repetida para as restantes possibilidades encontradas.

Divisão

Um outro grupo representativo de alunos (cerca de 25%) recorreu ao raciocínio partitivo para encontrar os divisores, revelando competência para coordenar relações entre duas variáveis. A figura 5 mostra-nos que estes alunos realizaram uma sequência de divisões tendo compreendido ser necessário que a divisão tivesse resto zero para que o divisor pudesse ser considerado como possibilidade de resposta.

Consideramos o raciocínio multiplicativo/partitivo, exposto nos últimos exemplos, mais desenvolvido e eficiente quando comparado com as estratégias iniciais apresentadas, pois evidenciam a relação estreita encontrada entre divisão e multiplicação para a descoberta dos divisores de um número.

Em termos de desenvolvimento das capacidades matemáticas, compreender este raciocínio recorrendo, como no caso presente, quer à multiplicação, quer à divisão, estabelecendo uma relação

entre as duas, envolve complexidade a nível cognitivo, sobretudo se pensarmos não apenas nas questões de cálculo, mas também em termos de modelação “dado que envolvem novos significados para os números e novos tipos de relações entre eles” (Carvalho & Gonçalves, 2003, p. 24).

Procura arranjar uma estratégia de modo a registar todas essas possibilidades.

$48 : 1 = 48 (r: 0)$ $48 \overline{) 1 \times}$ $48 \overline{) 2 \times}$ $48 \overline{) 3 \times}$
 $48 : 2 = 24 (r: 0)$ $\begin{array}{r} 48 \\ -4 \\ \hline 08 \end{array}$ $\begin{array}{r} 48 \\ -4 \\ \hline 08 \end{array}$ $\begin{array}{r} 48 \\ -3 \\ \hline 18 \end{array}$
 $48 : 3 = 16 (r: 0)$ $\begin{array}{r} 48 \\ -8 \\ \hline 00 \end{array}$ $\begin{array}{r} 48 \\ -8 \\ \hline 00 \end{array}$ $\begin{array}{r} 48 \\ -18 \\ \hline 00 \end{array}$
 $48 : 6 = 8 (r: 0)$ $\begin{array}{r} 48 \\ -8 \\ \hline 00 \end{array}$ $\begin{array}{r} 48 \\ -8 \\ \hline 00 \end{array}$ $\begin{array}{r} 48 \\ -18 \\ \hline 00 \end{array}$
 $48 : 7 = 6 (r: 6)$ $\begin{array}{r} 48 \\ -7 \\ \hline 00 \end{array}$ $\begin{array}{r} 48 \\ -7 \\ \hline 00 \end{array}$ $\begin{array}{r} 48 \\ -18 \\ \hline 00 \end{array}$
 $48 : 9 = 5 (r: 3)$ $\begin{array}{r} 48 \\ -9 \\ \hline 00 \end{array}$ $\begin{array}{r} 48 \\ -9 \\ \hline 00 \end{array}$ $\begin{array}{r} 48 \\ -18 \\ \hline 00 \end{array}$
 $48 : 48 = 1 (r: 0)$

As possibilidades são 1, 48, 2, 24, 3, 16.
 Os divisores são 1, 2, 3, 16, 24 e 48.

Figura 5. Resolução produzida com recurso à divisão (questão 1d)

Tabela de dupla entrada

Por último, em 4 das 9 turmas, um grupo de alunos (cerca de 20%) utilizou a tabela como estratégia instrumental para encontrar as várias possibilidades. Subjacente à sua construção está o recurso às operações da multiplicação ou divisão (figura 6). Nos exemplos seguintes observamos que os alunos inscreveram na tabela várias hipóteses e testaram a possibilidade de ser divisor, usando um X para assinalar a *não possibilidade*, evidenciando um raciocínio mais estruturado.

Questão 2)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	60
	60	30	20	15	12	16	X	X	X	6	5	4	3	2	1

Figura 6. Resolução produzida com recurso à tabela de duas entradas

No caso exemplificado pela figura 7 estão incluídos os *pares de divisores*, tornando claro que, por exemplo, o *valor 1* pode referir-se quer ao número de bombons, quer ao de embalagens, o que também já se verificou no exemplo anterior.

Estes alunos acrescentaram à tabela uma linha para inserir o total (correspondente à multiplicação da primeira linha pela segunda linha) demonstrando a veracidade de cada hipótese registada.

R: as possibilidades foram: 1, 48, 2, 24, 3 e 16.

bombons	48	24	16	12	8	6	2	3	1
embalagens	1	2	3	4	6	8	24	16	48
Total	48	48	48	48	48	48	48	48	48

Figura 7. Resolução produzida com recurso à tabela de duas entradas (questão 1d)

Aprendizagens evidenciadas pelos alunos

O reconhecimento de que os divisores (as hipóteses) podiam ser encontrados aos pares foi evidente nos registos produzidos.

As respostas apresentam as hipóteses agrupadas aos pares para todos os casos encontrados, como evidenciam as resoluções apresentadas na figura 8.

Divisores de 20 são: 1 2 4 5 10 20
Divisores de 40 são: 1 2 4 5 8 10 20 40

Figura 8. Resolução produzida - registo dos divisores aos pares

De acordo com enunciados escritos dos alunos, e os registos dos docentes envolvidos, em metade das turmas, observou-se uma dificuldade inicial em conceber a possibilidade do 1 como divisor, bem como a do próprio número enquanto divisor de si próprio. Estas não foram hipóteses imediatas para muitos dos alunos. Os momentos de diálogo coletivo foram fundamentais no sentido de permitirem uma reorientação dos alunos para o trabalho a desenvolver e no esclarecimento de dúvidas que persistiam. Permitiram igualmente garantir que os alunos pudessem, a partir da comunicação e justificação das estratégias seguidas, ter a possibilidade de ver os conhecimentos matemáticos surgir com significado e sistematizar conhecimentos. As sínteses produzidas no final da tarefa contribuíram para a uma melhor clarificação dos conceitos trabalhados, momento considerado essencial nesta faixa etária.

Relativamente às conclusões encontradas após a discussão coletiva, os exemplos seguintes ilustram algumas das sínteses feitas e corroboram a convicção de que os objetivos definidos para a tarefa terão sido globalmente alcançados.

a) “Os números que podemos usar para dividir outros números e não sobrar nada damos o nome de divisor.”; b) “Os divisores de um número são todos os números que multiplicados entre si, são o próprio resultado.”; c) “Em cada possibilidade descobrimos sempre um par de divisores.” Ao longo da tarefa procurou-se que os alunos fossem construtores do seu próprio conhecimento, pois como refere Ponte (2003) “Aprender resulta sobretudo de fazer e de refletir sobre esse fazer. (...) Criar as condições para que isso aconteça, desafiando os alunos e diversificando as situações de aprendizagem, é responsabilidade do professor” (p. 16).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Da análise dos dados emergem algumas considerações que põem em evidência a necessidade de desenvolver, o quanto antes, estratégias de ensino centradas nos processos e estilos de aprendizagem, tendo por base o currículo, de modo a promover aprendizagens mais significativas e participadas dos alunos. Ainda que globalmente os alunos tivessem conseguido identificar os divisores de um número natural, dar exemplos de divisores e compreender que os divisores de um número são divisores dos seus múltiplos (e vice-versa), foi evidente, na maioria dos alunos, o recurso a estratégias de resolução que implicavam a mobilização de processos cognitivos menos complexos, nomeadamente a representação icónica, como estratégia de resolução dos desafios propostos, traduzindo-se na estratégia menos eficiente para a descoberta dos divisores.

O recurso à multiplicação e à divisão foram as estratégias utilizadas por um grupo representativo de alunos, mas também aqui os dados evidenciaram diferentes níveis de compreensão do conceito de divisores e de que estes se podem encontrar aos pares. Estas estratégias revelaram-se mais facilitadoras da descoberta dos divisores, portanto mais eficientes do que as anteriores, e evidenciam um raciocínio mais complexo a nível cognitivo. Contudo, a estratégia explicitada que se revelou mais eficiente na descoberta dos divisores de um número - a tabela de duas entradas -, foi apresentada por uma baixa percentagem de alunos corroborando a ideia de que o ensino e a aprendizagem dos divisores de um número natural no 1.º ciclo do ensino básico é uma tarefa complexa, e por vezes difícil.

Salientamos a importância de o docente saber interpretar e compreender os processos de raciocínio dos alunos de modo a planificar e estruturar tarefas que se aproximem do estágio de desenvolvimento dos seus alunos, ao mesmo tempo que os ajuda a progredir no desenvolvimento dos conceitos.

Por último reforçar o postulado da necessidade de dar relevância aos momentos de discussão coletiva. Estimular e valorizar os raciocínios dos alunos procurando que estes os explicitem com a clareza que a sua idade permite e potenciar momentos para reagir e refletir sobre os raciocínios apresentados pelos colegas é algo que o docente deve colocar no centro da sua ação pedagógica. Por sua vez, ao tornar-se mais próximo e conhecedor do processo de aprendizagem do aluno, o docente otimiza a eficácia das estratégias de ensino e contribui para a qualidade do sucesso educativo dos alunos.

Referências

- ME (2017). Aprendizagens Essenciais. Lisboa: Ministério da Educação, DGE.
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11–17.
- Canavarro, P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. In Canavarro, P., Santos, L., Boavida, A., Oliveira, H., Menezes, L., & Carreira, S. (Eds.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática* (pp.255–266). Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Carvalho, A., & Gonçalves, H. (2003). Multiplicação e divisão: conceitos em construção*Educação e Matemática*, 25, 23–25.
- Ponte, J. P. (2003). O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In Conselho Nacional de Educação, *O Ensino da Matemática: Situação e Perspetivas*, 21–56. Obtido em 2019, de <http://www.cnedu.pt/pt/publicacoes/seminarios-e-coloquios/762-o-ensino-da-matematica-situacao-e-perspetivas>
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34): Lisboa: APM.
- Ponte, J. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática, In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 13–77). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

FÁTIMA ALEXANDRINO

GORETE FONSECA

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DA LOURINHÃ