

Dar sentido ao ensino das (e com as) frações

ISABEL ROCHA
MANUELA PIRES

Ao longo do tempo, têm sido publicados na Educação e Matemática textos excelentes sobre o sentido do número, cálculo mental e operações, envolvendo números racionais. Consideramos ser oportuno continuar a refletir e a escrever sobre este assunto, entre outras razões, porque: (1) os alunos mostram grandes dificuldades no trabalho com estes números, sendo necessário continuar a analisar verticalmente o que se faz entre ciclos/anos de escolaridade; (2) é necessário continuar o trabalho consistente realizado no âmbito do PAM (Plano de Ação da Matemática), no Programa de Formação Contínua em Matemática (PFCM), no Programa de Matemática de 2007 e no Plano da Matemática (PM), devido ao revés sofrido com o programa de 2013, que preconiza a introdução de operações formais desde cedo, sem referência aos vários sentidos dos números racionais.

Vivemos estes problemas com professores de todos os ciclos, com quem trabalhámos nos dois últimos anos, em oficinas de formação. Procuramos refletir neste artigo sobre o número racional na forma de fração, sentidos e operações, fazendo algumas referências a manuais escolares, enquanto recurso largamente utilizado na sala de aula.

O QUE SE PASSA COM AS FRAÇÕES?

A palavra fração tem vários significados, nem todos matemáticos, e os vários usos que dela fazemos podem causar confusão e dificuldades de comunicação sobre um assunto que é complicado. Por exemplo, na vida corrente, o termo fração é associado a *uma pequena parte*, a *um pouco* e na escola, desde os primeiros anos, os alunos trabalham formalmente com frações, que muitas vezes são maiores que a unidade. Algumas questões se colocam: que significado atribuem os alunos às frações? como são tratadas ao longo da escolaridade? quais as perceções dos professores sobre elas? como são tratadas nos manuais?

Nas discussões ocorridas nas oficinas de formação, verificámos que existiam diferentes conceitos de fração: (1) apenas como comparação parte/todo; (2) para referir qualquer número escrito na forma simbólica $\frac{a}{b}$; (3) com o mesmo significado que número racional.

A comparação parte/todo é muitas vezes usada para iniciar o estudo das frações. Esta tradição fez com que se encarassem como sinónimos os termos *fração* e *fração parte/todo* e isso empobreceu a visão dos números racionais. Felizmente, cada vez mais os professores se tornam conscientes das várias interpretações das frações, referindo-se a elas também como

operador, *medida*, *razão* e *quociente*, devendo as interpretações estar em igualdade.

Segundo Lamon (2006), sob um único símbolo de fração, existem diversas interpretações, formas de pensar e operar associadas. Na aprendizagem das frações, os alunos precisam de um ponto de partida com um dos sentidos de números racionais e aí desenvolver as ideias de unidade, partes da unidade representadas por frações, estratégias de comparação e equivalência de frações e depois precisam de tempo suficiente para trabalhar os vários sentidos.

A mesma autora defende que, quando se inicia o trabalho com frações, a matemática dá um salto qualitativo na sofisticação. De repente, significados, modelos e símbolos que funcionam ao adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números inteiros não são transponíveis para operar com frações. Vários saltos conceptuais contribuem para a dificuldade dos alunos em compreender frações. Enquanto, na contagem, a unidade “um” se refere a um único objeto, nas frações a unidade pode consistir em mais de um objeto (●●●● = 1 unidade) ou pode ser uma unidade composta, isto é, pode consistir em vários objetos agrupados como um (uma embalagem com 6 garrafas de água). A unidade pode ainda ser dividida em partes iguais e tem de se usar um novo tipo de número para nomear partes daquela unidade (⊕). Contribuem para o elevado grau de dificuldade as situações explicitadas abaixo:

– em cada nova situação, a unidade pode ser algo diferente (figura 1).

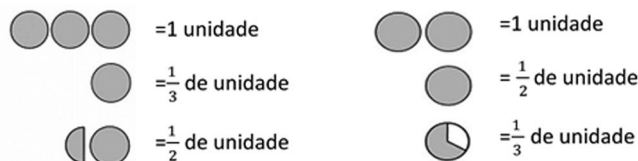


Figura 1. Unidades formadas por mais do que um objeto

– a mesma representação pode corresponder a partes diferentes da unidade (figura 2).



Figura 2. Representações idênticas, quantidades diferentes

– não há uma representação única para nomear parte de uma unidade. A mesma quantidade pode ser representada por frações equivalentes, mas com nomes diferentes. Por

exemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{6}{12}$ e $\frac{9}{18}$ da mesma unidade, são a mesma quantidade, pois representam a mesma parte dessa unidade. Nos manuais escolares¹ que analisámos encontramos opções diferentes relativamente ao conceito de fração, aos sentidos e aos contextos em que se trabalham as frações. No 1.º ciclo, é mais frequente aparecerem vários sentidos das frações em contextos diversificados, embora em alguns manuais se privilegie o contexto algo abstrato da representação da fração numa reta numérica. No 2.º ciclo, há uma tendência para haver referência apenas a um dos sentidos e identificámos problemas aquando da formalização do conceito de fração.

Há manuais em que se define fração como quociente entre dois inteiros e se afirma que “qualquer número que possa ser representado por uma fração diz-se um número racional” parecendo haver a identificação de *fração* com *número racional*.

Mas, segundo esta definição, que nome se poderá dar às representações $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5,6}{3,4}$ ou $\frac{1}{\frac{1}{8}}$ trabalhadas neste nível de escolaridade ou ao número irracional $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, trabalhado no 7.º ano?

Noutros manuais afirma-se que uma fração tem dois termos: denominador e numerador, que se definem respetivamente por “o número de partes iguais em que dividimos o todo” e “o número dessas partes que se tomaram do todo”. Como estes significados dos termos apenas têm sentido na fração como parte/todo e não identificámos situações nos vários manuais em que, para os outros sentidos, se questione o que representam o numerador e o denominador, o conceito de fração fica muito empobrecido e pode ser inadequado para interpretar um contexto real, em que exista, por exemplo, uma razão ou partilha. Estas podem ser algumas das causas para as dificuldades que os alunos têm na compreensão dos números racionais.

Por verificarmos que as situações descritas acima são restritivas e originam confusões, identificamo-nos com a perspetiva de que *frações* são símbolos bipartidos, uma forma para escrever números: $\frac{a}{b}$. Neste sentido, a palavra fração refere-se a uma representação, dois números escritos com uma barra entre eles.

SENTIDOS DAS FRAÇÕES E CONCEITOS/PROCEDIMENTOS OPERATÓRIOS

Uma boa compreensão das frações adquire-se em contextos diversificados que evidenciem os seus diferentes sentidos. São também esses contextos que dão significado aos termos da fração e aos papéis que o numerador e o denominador assumem em cada um dos sentidos. Lamon (2006) salienta que o cálculo não deve ser separado do sentido das frações e recomenda que quando forem introduzidas as operações e quando forem consolidadas, se ligue cada procedimento operatório a contextos e sentidos adequados. Um ensino que se baseie apenas num dos sentidos de fração e em regras operatórias traz problemas

na aprendizagem dos alunos com compreensão. Assim, apresentamos em cada uma das quatro secções que se seguem os sentidos e os respetivos procedimentos que são adequados trabalhar, começando por mostrar essas relações num esquema.

FRAÇÃO COMO PARTE/TODO E COMO QUOCIENTE (PARTILHA)

O esquema (figura 3) pode ajudar a visualizar as relações, que procuraremos contextualizar em seguida, quando se trabalha com estes sentidos.

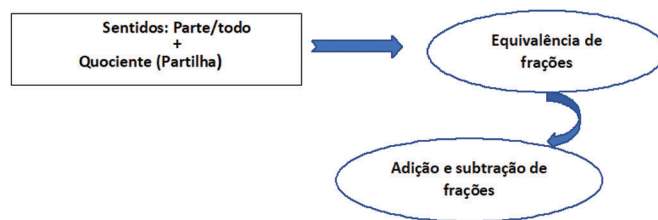


Figura 3. Número racional como parte/todo e como quociente

A representação geométrica da divisão de chocolates retangulares em partes iguais (quociente/partilha equitativa)² é um bom modelo (modelo de área) para a comparação de frações, nomeadamente quando têm o mesmo numerador ou denominador. Já na comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes, a utilização da reta numérica e a consideração de números de referência (como 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ...) é uma boa estratégia para a comparação e/ou utilização de frações equivalentes. É algo que entendemos ser, regra geral, trabalhado nas aulas e nos manuais, pelo que não vamos desenvolver esta questão.

Para exploração inicial da adição de frações apresentamos um problema muito comum:

Quatro amigos partilham 3 chocolates de forma equitativa. Representa essa partilha, pelo menos de duas maneiras diferentes, através de um desenho, em que os chocolates estão representados por retângulos. Sombreia a parte que corresponde a cada amigo.
Que quantidade coube a cada um?
Que significado atribuis ao numerador e denominador da fração obtida?

Para facilitar a discussão sobre o que pretendemos explorar, a equivalência e a adição de frações, em cada uma das situações solicitamos que a região sombreada seja representada por uma expressão com frações, como está ilustrado na figura 4. Além disso é importante perceber que, independentemente da representação obtida em cada figura, a partilha foi equitativa logo a quantidade que cabe a cada um é sempre a mesma $\left(\frac{3}{4}\right)$. E nesta fração o numerador representa o número de itens a partilhar (os 3 chocolates) e o denominador o número total de partilhas (os 4 amigos), representando a fração a quantidade de chocolate que cabe um.

¹ No artigo “Como manuais escolares abordam o tema Números Racionais”, publicado no número temático 144/145 da revista Educação & Matemática (Delgado et al., 2017, pp.75-80) podemos ver uma análise detalhada de vários aspetos dos manuais sobre os números racionais.

² Seção Materiais para a aula de Matemática da EM 148: Número racional como quociente

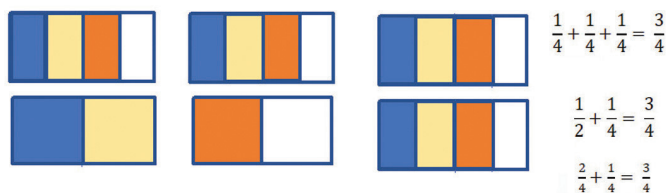


Figura 4. Adição de frações

Na primeira representação, a estratégia usada foi a divisão dos três chocolates em quatro partes iguais, enquanto que na segunda, dois chocolates são divididos ao meio e assim ficam com quatro partes iguais (metades), cabendo $\frac{1}{2}$ a cada amigo. E ainda há um chocolate que terá de ser dividido em quatro partes iguais, cabendo mais um quarto a cada um (figura 4).

A representação destas partilhas pelas respetivas expressões numéricas permite explorar a adição de duas frações: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, recorrendo ainda à equivalência de frações $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, “para se compreender a relação da soma com as parcelas”. A partir daqui pode-se explorar a equivalência de frações e a adição de frações com denominadores diferentes, mas em que um é múltiplo do outro.

A equivalência de frações será a estratégia adequada para converter a adição de frações com denominadores diferentes em adição de frações com o mesmo denominador.

Em nosso entender, este tipo de exploração, iniciada nos primeiros anos de escolaridade, tem de ter continuidade nos ciclos do ensino básico, para se adquirir a compreensão necessária para a interpretação das operações.

FRAÇÃO COMO OPERADOR

O esquema que abaixo apresentamos (figura 5) permite visualizar os procedimentos, que procuraremos contextualizar, em seguida, quando se trabalha com este sentido.



Figura 5. Número racional como operador

Na *interpretação como operador*, os números racionais surgem como transformadores de uma situação (operam sobre ela), pensamos nos números racionais como funções. Por exemplo, aumentam ou reduzem o número de itens num conjunto discreto (e.g. $\frac{2}{3}$ de 6), transformam uma figura geométrica plana noutra da mesma forma (figura 6), mas com dimensões diferentes (maior ou mais pequena), consoante o operador. Esta é uma situação em que devemos questionar quais os operadores que levam a um acréscimo e quais levam a um decréscimo, o que proporciona uma maior compreensão das frações menores ou maiores do que a unidade (figura 6). Estamos a falar em ampliações, reduções, aumentar, encurtar, ou seja, multiplicar e dividir.

Sendo assim, compreender os números racionais como operadores implica compreender os efeitos da aplicação sucessiva de dois ou mais operadores, quando o segundo operador

é aplicado ao resultado obtido com a aplicação do primeiro operador. Este tipo de composição surge com frequência em situações do dia a dia.

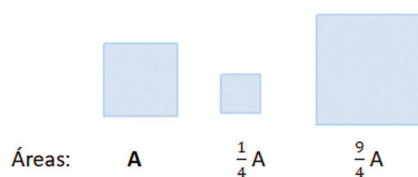


Figura 6. Fração como operador

Claramente esta interpretação das frações como operadores fornece um contexto muito útil para a multiplicação de frações. O modelo de área também é útil para a multiplicação de frações, explorada nos materiais da EM 146³ de aplicação sucessiva de operadores que se traduz na multiplicação de frações.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ significa tirar $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ da unidade.



Figura 7. Modelo de área para a multiplicação de números racionais

Primeiro divide-se, na vertical, a unidade de partida em 4 partes iguais e assinalamos 3 dessas partes que corresponde à fração $\frac{3}{4}$. Depois dividimos a parte sombreada em 3 partes iguais (agora na horizontal, que facilita) e sombreamos duas dessas partes e obtemos o produto das frações (figura 7) que corresponde à área de um retângulo que é metade da área inicial (da unidade de partida), logo metade da unidade: $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

Vamos traduzir por uma expressão aritmética todos os passos que demos na representação geométrica, começando por ler da direita para a esquerda: $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 2 \times \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{4}$.

Como já verificámos, o resultado final (parte sombreada mais escura) corresponde à área de metade da unidade (figura 7) ou considerando a divisão inicial em quatro partes iguais a $\frac{2}{4}$ da unidade.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 2 \times \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{4} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

E mais tarde (não tem (e nem deve) de ser no 5.º ano), estes problemas serão ótimos para ajudar os alunos a intuir “a regra”. Ao voltar à representação geométrica e olhar o resultado em termos da subunidade mais pequena (quadrado mais pequeno) concluir que o resultado se pode escrever como

$$\frac{6 \text{ (n.º de quadrados da parte obtida)}}{12 \text{ (n.º de quadrados em que a unidade está dividida)}} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \frac{6}{12}$$

Depois deste percurso os alunos irão deduzir a relação do numerador e denominador desta fração com os respetivos

³ Seção Materiais para a aula de Matemática da EM 146: Número racional como operador

numeradores e denominadores das frações, fatores da multiplicação efetuada.

Em vários manuais dos 1.º e 2.º ciclos, a multiplicação é introduzida a partir de um problema e um contexto intencional que permite intuir uma regra. É usado o sentido fração como operador, quer de um todo discreto quer contínuo, recorrendo-se, neste caso, quase sempre ao modelo retangular. No entanto, observámos duas situações em alguns manuais: (1) apresentam-se apenas regras; (2) não interpretam os resultados e não utilizam a linguagem própria do operador, possivelmente por fazerem apenas referência ao sentido parte/todo.

FRAÇÃO COMO MEDIDA

A medição é um dos grandes tópicos do currículo dos primeiros anos de escolaridade e os conceitos associados à medição têm um papel relevante na compreensão dos *números racionais (como medida)*. Os programas do 1.º e 2.º ciclos contemplam todos os tópicos relacionados com a medição: unidades de medida, medição de perímetros, áreas, volumes/capacidades e tempo. Ao trabalhar as unidades de medida, e para se obter uma medição tão precisa quanto se precisar, verifica-se a necessidade de dividir a unidade de medida considerada em subunidades cada vez menores. As frações são aqui perfeitamente integradas, o que também nos questiona sobre a necessidade de estes conceitos serem trabalhados em simultâneo.

O esquema que abaixo apresentamos (figura 8) permite visualizar os procedimentos, que procuraremos contextualizar, em seguida, quando se trabalha com este sentido.

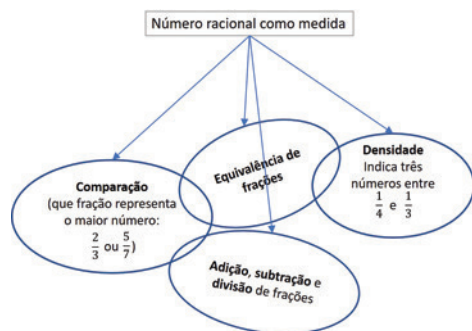


Figura 8. Número racional como medida

Há vários contextos para os primeiros anos de escolaridade em que esta necessidade de obter subunidades cada vez menores pode ser trabalhada ainda com unidades informais, por exemplo, na medição das alturas dos colegas da sala ou da sua própria altura, com uma régua em cartolina que é escolhida para unidade e quase sempre fica “um bocadinho” por medir que é menor que a unidade escolhida e assim tem de se dividir a unidade em subunidades.

O que nos leva à discussão da *densidade* dos números racionais, porque existe um número infinito de frações entre qualquer par de frações, não importa quão perto elas estejam, e é essa propriedade que permite a aproximação mais rigorosa de uma medição.

Aliás os números racionais não inteiros surgiram da necessidade de traduzir o resultado de uma medição.

Outros conceitos (além da densidade) e procedimentos que podem ser potenciados são comuns aos da interpretação da fração como quociente e parte/todo mas agora neste contexto de medição de grandezas: comparação, equivalência, adição e subtração de frações. Mas surge uma nova operação, a divisão de frações, que consideramos dever ser iniciada com tarefas envolvendo frações em contexto de medida.

A investigação nesta área aponta a abordagem desta operação em contextos de medida como adequada (Pinto, 2011). Este estudo evidenciou a pouca familiaridade dos alunos participantes com o significado da divisão como medida. Adaptámos uma das tarefas exploradas nesse artigo (figura 9).

Vamos encher copos de $\frac{1}{4}$ de litro com água da garrafa que tem 1 litro. Quantos copos se enchem? E se a garrafa tiver $\frac{1}{2}$ litro? E se os copos só levarem $\frac{1}{8}$ litro?

Afinal o que se pretende é dividir um litro de água por copos com capacidade de um quarto de litro. Nesta divisão, o dividendo representa a quantidade a dividir, o divisor a medida considerada, pelo que o dividendo e divisor têm a mesma natureza, a água, em litros e o quociente representa o número de copos, uma nova grandeza.

1.ª questão: dividendo $1l$ (capacidade da garrafa); divisor $\frac{1}{4} l$ (capacidade do copo)

$$\frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 \div \frac{1}{4} = 4 (\text{quantidade de copos})$$

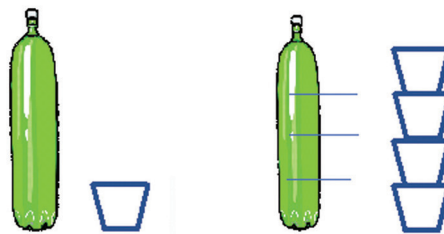


Figura 9. Simulação da divisão como medida

2.ª questão: E se a garrafa tiver meio litro de água?

A resposta deve ser procurada a partir da 1.ª questão e só depois formalizar (se a garrafa tem metade da água que a outra tinha, vai encher mais ou menos copos, e quantos). Com a resposta encontrada (2, porque enchemos metade dos copos que enchemos com a garrafa de um litro $\frac{4}{2}$), escrevemos então a expressão numérica que traduz a operação:

dividendo/numerador: $\frac{1}{2}$ divisor/denominador: $\frac{1}{4}$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{2} = \frac{1}{2} \text{ de } 4$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{2} = \frac{1}{2} \text{ de } 4 = 2$$

Número inverso do denominador

operador

3.ª questão: E se os copos só levarem $\frac{1}{8}$ litro?

Mais uma vez a resposta deve ser procurada a partir da 2.ª questão e só depois formalizar. Nesta situação em que a garrafa tem a mesma capacidade da garrafa da questão anterior, meio litro, e o copo é que tem menor capacidade (metade da capacidade dos copos da questão anterior), precisaremos do dobro dos copos, ou seja, 4. Esta relação inversa nem sempre é fácil de deduzir. Este trabalho deve vir na continuidade do já realizado no 1.º ciclo sobre a divisão com números inteiros em contextos idênticos (por exemplo: de quantas caixas necessitamos para distribuir 48 maçãs por caixas de 6? E se as caixas levarem 12 maçãs? E ...)⁴

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{8} = \frac{8}{2} = 4 = \frac{1}{2} \text{ de } 8 \text{ (número de copos)}$$

A divisão também pode ser interpretada com o modelo de área:

$\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$
Quantas vezes $\frac{2}{3}$ da unidade cabe em $\frac{3}{4}$ da mesma unidade? Começamos por representar a unidade e sombreadar $\frac{3}{4}$ da unidade (dividindo a unidade em quatro partes iguais na vertical) (figura 10).

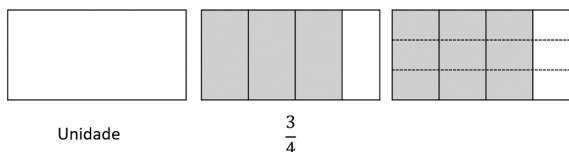


Figura 10. Modelo de área na divisão de frações

O que pretendemos saber é quantas vezes uma área de $\frac{2}{3}$ da unidade cabe nesta área sombreada (figura 10). Então dividimos em 3 partes iguais, na horizontal, a área sombreada (figura 10). Mas não esquecer que $\frac{2}{3}$ da unidade corresponde à área sombreada mais escura da figura 11, ou seja, corresponde à área de 8 quadrados, ficando a unidade inicial dividida em 12 partes.



Figura 11. $\frac{2}{3}$ da unidade

Vamos então ver quantas vezes estes 8 quadrados (figura 11) cabem na área de $\frac{3}{4}$ da unidade.

Vê-se que cabem uma vez (sombreado mais escuro) e ainda há um quadrado sobrando (figura 12). E este corresponde a que fração da área de $\frac{2}{3}$? Se esta área corresponde a 8 quadrados (figura 12) então um quadrado representa $\frac{1}{8}$ dessa área.

⁴ Rocha, I. e Menino, H. (2008). A aprendizagem da divisão nos primeiros anos, perspectivas metodológicas e curriculares. Em J. Brocardo, L. Serrazina e I. Rocha (Org.). O sentido do número-reflexões que entrecruzam teoria e prática (pp.183-200). Lisboa: Escolar Editora

Logo a área de $\frac{2}{3}$ cabe uma vez mais um oitavo na área de $\frac{3}{4}$.

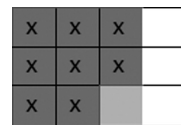


Figura 12. Representação do resultado da divisão $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$

Podemos então concluir que $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{8} = 1\frac{1}{8}$

Porquê $\frac{1}{8}$? Quando estamos a averiguar quantas vezes cabe $\frac{2}{3}$ numa área de $\frac{3}{4}$, o que sobra tem de ser referido à área de $\frac{2}{3}$ (ao divisor) e não à unidade inicial ou ao dividendo.

E, como na multiplicação, só muito mais tarde, quando o professor sentir que o aluno consegue relacionar o resultado com os numeradores e denominadores das frações, poderá ser o aluno questionado, como na multiplicação, para intuir a regra operatória que tornará o cálculo mais rápido.

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{4 \times 2} = \frac{9}{8}$$

Pela nossa experiência, e como também aponta a investigação, a divisão de frações em problemas de contexto de medida é melhor compreendida pelos alunos do que na utilização do modelo de área. Em termos de formação de professores entendemos que se devem discutir todos os modelos.

Os manuais dos 1.º e 2.º ciclos analisados introduzem a divisão da mesma forma que a multiplicação, pelo que alguns apresentam apenas regras. Nos que apresentam contextos da divisão como partilha e/ou medida fazem-no com níveis de exploração diferentes, não havendo incidência no que significam, em cada contexto, o numerador/dividendo e o denominador/divisor, qual a natureza das grandezas com que se trabalha e qual a que se obtém como resultado.

FRAÇÃO COMO RAZÃO

No esquema que se segue (figura 13) procuramos sistematizar os procedimentos potenciados por este sentido.

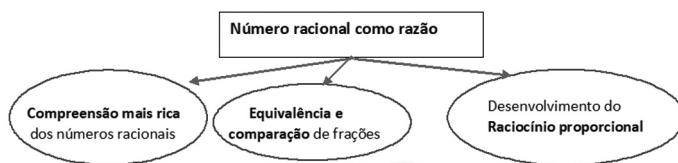


Figura 13. Número racional como razão

A interpretação da *fração como razão*, surge quando se comparam grandezas de tipos diferentes ou quando se compara a medida da parte de um conjunto com a medida de outra parte do conjunto (de que é exemplo muito usado, a comparação do número de rapazes com o número de raparigas de uma turma ou escola, etc.). Mas, se usarmos o exemplo: numa escola existem 12 computadores para cada grupo de 20 alunos $\frac{12 \text{ computadores}}{20 \text{ alunos}}$ as grandezas que se comparam são diferentes e não se pretende um resultado, apenas a razão entre computadores e alunos (para analisar necessidades de aquisição, ou sua distribuição, etc).

As razões são um desafio na sala de aula devido à diversidade de situações no seu uso diário. Isso significa que, ao resolver problemas de razão, é importante discutir todas as questões e entendimentos relacionados com todo o tipo de informação que pode ser obtida das informações — implícitas ou explícitas que se retiram das razões (Lamon, 2006). Parece-nos relevante refletir sobre as questões que esta autora indica que devem ser colocadas nas discussões de situações de razão:

- Além dos factos explícitos, o que mais se sabe sobre essa situação?
- Faz sentido reduzir a razão? A razão pode ser ampliada?
- Se se ampliar ou reduzir a razão, que informações são obtidas ou perdidas?
- Se se escolher uma amostra menor ou maior, podemos aplicar a razão?
- Qual é o significado de uma razão dividida (onde se observa apenas o resultado da divisão)?

Vejamos situações de razão em que se discutem algumas destas questões:

- Bruno tem 32 anos e o filho tem 4 anos. Esta razão é extensível, ou seja, aplica-se nos anos seguintes? A proporção $32:4 = 8:1$ compara a idade do pai com a idade do filho neste momento, em que o pai é oito vezes mais velho que o filho. No próximo ano, o pai terá 33 e o filho 5, logo não é verdade que o pai será oito vezes mais velho que o filho e isso também não acontecerá noutro ano futuro. Qual foi o efeito de reduzir esta proporção? Facilitou a comparação das idades, mas perdeu-se a informação sobre as idades atuais.
- Numa turma de 27 alunos, a razão de raparigas para rapazes é de 3:6. Além do que está explícito, que mais podemos saber desta turma?
 - Se reduzirmos a razão 3:6 a 1:2, ficamos a saber que para cada rapariga existem dois rapazes na turma. O que nos permite saber que um terço dos alunos da turma são raparigas, mesmo sem ainda sabermos quantas são.
 - Será que podemos saber o número exato? Podemos ampliar a razão até que a soma dos dois termos da razão dê 27 e como é um número ímpar terá de resultar da soma de um ímpar com um par: $5:10$ ($5+10 \neq 27$); $7:14$ ($7+14 \neq 27$), $9:18$ ($9+18=27$). Ficamos a saber que nesta turma há 9 raparigas e 18 rapazes.
 - A razão será extensível? Poderemos saber quantos rapazes haverá numa turma de 31 alunos? Não podemos esquecer que esta razão se aplica a esta turma, não é generalizável a outra turma.
 - E se escolhermos aleatoriamente 6 alunos da turma, posso esperar que sejam 2 raparigas e 4 rapazes? A razão 3:6 refere-se a toda a turma e não a um subconjunto da mesma. Escolhendo 6 alunos, nada nos garante que sejam 2 raparigas e 4 rapazes. Significa que ao escolher uma amostra menor a razão não se aplica.
- Um exemplo do contexto desportivo: na nossa equipa preferida de voleibol no final das primeiras 16 jornadas (cerca de metade da competição) a razão entre vitórias e derrotas era de 12:4. Faz sentido reduzir ou ampliar a razão?

Ao reduzir, afirmamos que foi uma razão de 3 vitórias para 1 derrota, mas então referimo-nos a 4 jogos. A razão dada diz respeito a um conjunto de 16 jogos e nos 4 primeiros jogos a equipa até pode ter ganho todos, ter ganho 2 e perdido 2, etc., logo não faz sentido. Da mesma forma não sabemos se esta razão se mantém nos jogos que faltam disputar.

- Em consequência da pandemia, somos diariamente confrontados com muita informação sobre a Covid 19, incluindo informação matemática. Esta deve ser aproveitada para aumentar a literacia matemática da população em geral e dos nossos alunos, em particular. Vejamos uma notícia do Público online no dia 12 de maio:

Portugal registou até esta terça-feira 1163 mortes, mais 19 que na segunda-feira, um aumento de 1,8%. Foram identificados mais 234 casos nas últimas 24 horas, o que corresponde a uma taxa de crescimento de 0,8%. Desde o começo do surto, já foram identificados 27.913 casos.

Qual é o significado destas percentagens? Como foram obtidas? Em ambos os casos estamos perante crescimentos relativos, ou seja, a informação é sobre qual foi o aumento num dia relativamente ao número total de casos que existiam. No caso do número de mortes, vejamos a comparação entre o aumento verificado em 24 horas de 11 para 12 de abril e de 11 para 12 de maio (dados do site da DGS em 12 de maio). No dia 11 de abril o total de mortes registado foi 470 e no dia seguinte 504. Em 24 horas houve 34 mortes, que representou um aumento de 7,23% relativamente ao número existente no dia anterior:

$$\frac{34}{470} \approx 0,0723 = \frac{7,23}{100} = 7,23\%$$

Um mês depois, no mesmo período de 24 horas, o número de mortes foi de 19, obtendo-se o aumento relativo a 1144 ($1163-19$) fazendo: $\frac{19}{1144} \approx 0,0166 = \frac{1,66}{100} = 1,66\% \approx 1,7\%$, (o valor apresentado na notícia é 1,8%). Nos dois casos os aumentos são baixos, mas o aumento diário do dia da notícia é muito menor do que há um mês atrás.

Relativamente ao número de infetados, outra opção é comparar o número total de infetados num dia com o número total do dia anterior e interpretar essa informação. Comparando as mesmas duas datas, em 12 de abril o número é 1, 037 vezes maior que o do dia anterior, logo o aumento foi de 3,7% ($\frac{16585 \text{ infetados no dia } 12/4}{15987 \text{ infetados no dia } 11/4} \approx 1,037$) (e em 12 de maio é 1,008 vezes maior do que no dia anterior, sendo o aumento de 0,8% ($\frac{27913 \text{ infetados no dia } 12/5}{27679 \text{ infetados no dia } 11/5} \approx 1,008$)) (bastante inferior ao do mês anterior, o que mostra que no número de infetados também continua a haver aumento, mas menor. Nos dias 11 e 12 de março não havia óbitos, mas já havia pessoas infetadas, sendo o aumento nessas 24 horas de 32%. É um aumento brutal relativamente a maio, embora os números absolutos fossem muito pequenos ($\frac{78 \text{ infetados no dia } 12/3}{59 \text{ infetados no dia } 11/3} \approx 1,32$). Para uma melhor compreensão destes aumentos é importante analisar as razões

que lhe deram origem, mantendo as etiquetas no numerador e no denominador.

Este trabalho com razões pode desenvolver a capacidade dos alunos de analisar as mudanças em termos absolutos e relativos e de raciocinarem proporcionalmente nos contextos adequados. Apesar dos alunos trabalharem desde cedo razões e proporções e resolverem, ao longo da escolaridade nas várias disciplinas, exercícios e problemas envolvendo proporcionalidade, verificam-se grandes dificuldades na compreensão de número racional e conceitos multiplicativos relacionados em alunos de todas as idades.

CONCLUSÃO

Dada a complexidade dos números racionais e o empobrecimento que se verifica no seu tratamento, o ensino das frações exige um compromisso entre os professores que os alunos encontram ao longo dos anos. É um grande desafio escolar que pode ser potenciado e facilitado pela estrutura dos agrupamentos de escolas, mas pressupõe um aumento do diálogo entre os professores dos vários ciclos e anos e um envolvimento das coordenações dos departamentos e das direções. Em cada Agrupamento de Escolas deve haver um conhecimento claro do que se trabalha em cada ciclo e das decisões tomadas que podem ter uma sequência do tipo:

Os vários sentidos dos racionais na forma de fração devem ser trabalhados em todos os ciclos, pois a consolidação não fica feita nos primeiros anos. Após iniciar o estudo das frações com o sentido parte-todo, selecionar em cada ano um ou mais dos outros sentidos dos números racionais: quociente, operador, medida ou razão, que devem ser trabalhados com profundidade. Em cada um dos sentidos e nos contextos escolhidos, os alunos devem interpretar os papéis que o numerador e o denominador assumem, bem como o número que a fração representa.

Nos 2.º e 3.º ciclos, em que há um reforço do cálculo com frações, este deve ser ligado a contextos, sempre que possível, com reforço do cálculo mental.

O cálculo não pode ser separado dos sentidos das frações e na introdução das operações e sua consolidação deve ligar-se cada sentido do número racional ao procedimento operativo:

- os sentidos de fração como parte/todo e quociente como partilha são apropriados na equivalência de frações e na adição e subtração;
- o sentido de número racional como medida é apropriado na comparação de frações; equivalência e densidade, bem como nas operações adição, subtração e divisão;
- o sentido de número racional como operador é apropriado nas operações multiplicação e divisão.

Ao longo da escolaridade, os alunos precisam de trabalhar em contextos que envolvam os sentidos das frações para interiorizarem o conceito de número racional e adquirirem compreensão sobre as operações. Só os professores poderão planificar de forma a que os alunos tenham o tempo necessário para essa compreensão, contrariando a pressa de chegar às regras, tantas vezes mal aplicadas. A cada um de nós, professores, cabe o papel decisivo na incorporação de ideias e seleção de tarefas, e o trabalho colaborativo entre pares ajuda a que nos sintamos confortáveis e confiantes para isso.

Referências

- Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New Jersey: Lawren Erlbaum Associates, Inc.
- Pinto, H. (2013). Problemas de contexto no ensino-aprendizagem da divisão de números racionais. *Educação & Matemática*, 124, 8-11

ISABEL ROCHA

MANUELA PIRES

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Na sequência da secção “Pense Nisto” relativa à promoção de desconto numa livraria, apresentam-se as seguintes condições sobre as quais importa que os alunos reflitam.

Após a compra é emitido um vale utilizável numa ou várias compras até ao limite de 50% do valor total dos livros da compra.

Exemplos:

- Vale emitido: 20€

Após a emissão do vale, se fizer uma compra igual ou superior a 40€ será aplicada a totalidade do valor do vale (20€), uma vez que 20€ é 50% de 40€, ou seja, o valor do vale não é superior a 50% do valor total da compra.

- Vale emitido: 15€

Após a emissão do vale, se fizer uma compra de 12€ serão aplicados 6€ de desconto pois o vale utilizado não pode ultrapassar 50% do valor da compra. O valor restante, 9€ (15€-6€) poderá ser utilizado numa outra compra que continue a respeitar o limite de 50% dessa compra.

Depois de descrita a situação do regulamento da promoção de desconto da livraria, estas são algumas perguntas que podem ser feitas aos alunos. As perguntas que se apresentam abrangem diversos ciclos.

JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO
COLÉGIO SANTA CRUZ - BRASIL