Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?

João Pedro da Ponte
Marisa Quaresma
Joana Mata Pereira

Um dos grandes objetivos do ensino da Matemática é desenvolver a capacidade de raciocinar. Mas o que é raciocinar? Quais os aspetos fundamentais da capacidade de raciocínio? De que modo pode o professor na sala de aula promover o desenvolvimento desta capacidade? São questões que iremos analisar, procurando conjugar perspetivas teóricas e exemplos concretos da sala de aula.

RACIOCINAR E PENSAR

É um lugar-comum dizer-se que "a Matemática requer raciocínio" e também que "desenvolve o raciocínio". Mas o termo "raciocinar" tem vários sentidos, como, por exemplo, os que lhe são dados pelo dicionário:

> Raciocinar: 1. fazer uso da razão para depreender, julgar ou compreender; 2. encadear pensamentos de forma lógica; 3. apresentar razões; 4. ponderar; reflectir; pensar (Do lat. ratiocinári) (Dicionário Porto Editora)

Depreender, julgar, compreender, pensar de forma lógica, apresentar razões, ponderar, refletir… São muitos significados diferentes! O que é então raciocinar?

Desde logo, coloca-se a questão se "raciocinar" será o mesmo que "pensar" ou se será algo mais específico, ou seja, "pensar de certa maneira". No nosso entender, consideramos que se deve atribuir a "raciocinar" um significado mais restrito que "pensar" (figura 1). Na nossa perspetiva, raciocinar é realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado. Este entendimento está em consonância com outro dicionário, (Merriam-Webster) que diz que raciocinar é estabelecer inferências ou conclusões a partir de factos conhecidos ou assumidos como verdadeiros. Acrescentamos apenas que isso deve ser feito de forma fundamentada e não ao acaso. Descrever um objeto, relatar um acontecimento, exprimir um sentimento ou formular um desejo, sem mais, envolvem pensamento, mas podem não envolver raciocínio.

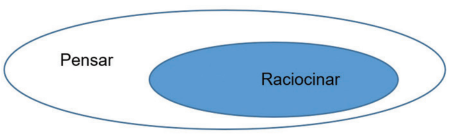


Figura 1. Raciocinar e pensar.

RACIOCÍNIO DEDUTIVO, INDUTIVO E ABDUTIVO

O raciocínio não é exclusivo da Matemática. Existe em todos os domínios do conhecimento bem como na vida do dia-a-dia. Há alguns aspetos, no entanto, que são caraterísticos da Matemática. Desde logo, há a referir a importância do raciocínio dedutivo, muitas vezes também referido como raciocínio lógico ou raciocínio lógico-dedutivo, que ocupa um lugar fundamental nesta ciência. Em Matemática, assumimos um conjunto de afirmações como verdadeiras (axiomas ou postulados) e assumimos um conjunto de regras de inferência, para obter novas afirmações verdadeiras (teoremas). Deste modo "raciocinar dedutivamente envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento" (Ponte, Branco & Matos, 2008, p. 89). Desde que a cadeia de deduções esteja isenta de erros "o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas" (Oliveira, 2008, p. 7). Como refere Oliveira (2002), o raciocínio dedutivo constitui "o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático" (p. 178), sendo através dele que se validam as afirmações matemáticas. A importância do raciocínio dedutivo em Matemática é de tal ordem que Davis e Hersh (1995) afirmam mesmo que a dedução é o "selo da Matemática".

No entanto, as novas descobertas, na maior parte dos casos, não surgem através de raciocínio dedutivo mas sim de outros tipos de raciocínio, nomeadamente de raciocínio indutivo e abdutivo. George Pólya (1990) valorizou de forma eloquente o papel do raciocínio indutivo em Matemática. Como indica, a indução é a inferência de uma regra a partir da observação do que é constante em diversos casos particulares. Já a abdução é um processo de inferência que parte de um facto insólito ou invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência (Silva, 2009). Este tipo de raciocínio foi teorizado por Charles Sanders Peirce (1931–1958), que afirma que "[a] abdução, ao fim e ao cabo, não é senão conjetura… é o processo de escolher uma hipótese" (Vol. 7, p. 219). Pelo seu papel na formulação de conjeturas e generalizações, a abdução e a indução são muitas vezes usadas em conjunto (Rivera & Becker, 2009). O facto insólito ou invulgar para o qual se formula uma conjetura (raciocínio abdutivo), pode levar à identificação de casos particulares que permitem a observação de uma regra geral (raciocínio indutivo).

QUE LUGAR PARA OS DIFERENTES TIPOS DE RACIOCÍNIO NA AULA DE MATEMÁTICA?

Durante muito tempo, os estudos em educação matemática centravam-se exclusivamente no raciocínio dedutivo (Balacheff, 1888; Galbraith, 1995; Hanna, 2002). A maior parte destes estudos tendia a ver os raciocínios indutivo e abdutivo como obstáculos ao raciocínio matemático. Mais recentemente, registou-se uma grande mudança a este respeito – em vez de serem vistos como estando em conflito, estas diferentes formas de raciocínio passaram a ser vistas como complementares. Cada uma tem um papel importante e insubstituível – o raciocínio indutivo e abdutivo na criação de novo conhecimento e o raciocínio dedutivo na sua validação. O raciocínio dedutivo tem um lugar incontornável na validação das afirmações matemáticas, mas muitas dessas afirmações são descobertas através de raciocínio indutivo e abdutivo. Deste modo, os alunos devem aprender a raciocinar dedutivamente em Matemática mas devem igualmente aprender a raciocinar indutiva e abdutivamente (Rivera & Becker, 2009).

Assim, é de grande importância saber como pode o professor, na sala de aula de Matemática, contribuir para que os alunos desenvolvam a capacidade de raciocínio nas suas diversas formas.

RACIOCÍNIO EM TAREFAS ENVOLVENDO FRAÇÕES

Um modelo de aula propício ao desenvolvimento do raciocínio é a aula em três fases. Esta aula organiza-se do seguinte modo:

1. Lançamento da tarefa, com uma pequena discussão para promover o envolvimento dos alunos.
2. Trabalho autónomo dos alunos, realizado em pares, em grupos, ou em modo individual.
3. Discussão coletiva, com apresentação e confronto de resoluções e síntese final.

Numa só aula, qualquer que seja a sua duração, podem existir um ou mais ciclos com este tipo de sequência de trabalho. Vejamos alguns exemplos de raciocínios que se evidenciam em respostas escritas dos alunos a tarefas matemáticas realizadas durante o trabalho autónomo.

Um exemplo é apresentado na figura 2.

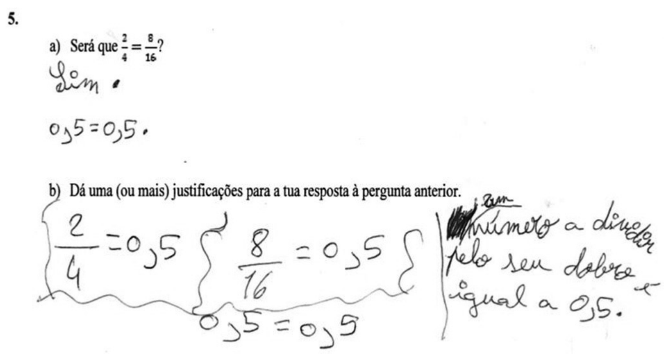


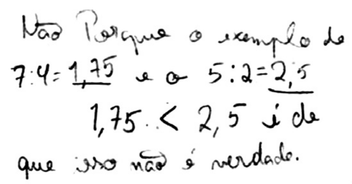
Figura 2. Justificação e generalização de Catarina (6.º ano).

Na primeira alínea pergunta-se "Será que $\frac{2}{4}$ é igual $\frac{8}{16}$?", Catarina responde afirmativamente e, sem que tal lhe tenha sido perguntado, avança de imediato com uma breve *justificação*: 0,5=0,5, baseada numa mudança de representação. Na resposta à questão b), a aluna detalha mais a sua *justificação* indicando que $\frac{2}{4}$ é igual a 0,5 e $\frac{8}{16}$ é igual a 0,5, concluindo portanto (embora sem verbalizar) que $\frac{2}{4}$ é igual a $\frac{8}{16}$, no pressuposto que duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si. Apresenta ainda uma curiosa *generalização*: "Um número a dividir pelo seu dobro é igual a 0,5".

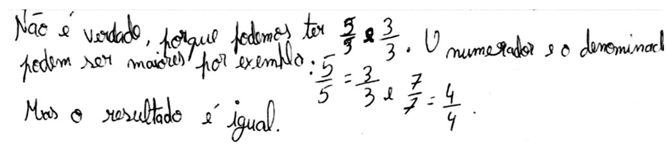
Vejamos outro exemplo. Trata-se de uma outra tarefa, muito mais complexa, envolvendo comparação de frações (figura3). A resposta de Marco evidencia uma *justificação por contraexemplo*, um importante processo de justificação matemática. O aluno indica que a resposta à questão é negativa porque num dado caso a afirmação é falsa.

É interessante notar que o aluno efetuou diversas mudanças de representação para dar a sua resposta. Primeiro, converteu as frações ($\frac{7}{4}$ e $\frac{5}{2}$) para quocientes (7:4 e 5:2) e depois estes para numerais decimais (1,75 e 2,5). É nesta representação que o aluno considera que a justificação se torna convincente dado que 1,75 é sem qualquer dúvida menor que 2,5.

Se uma fração tem numerador e denominador maiores que uma outra fração, será necessariamente maior que esta segunda fração?



Marco



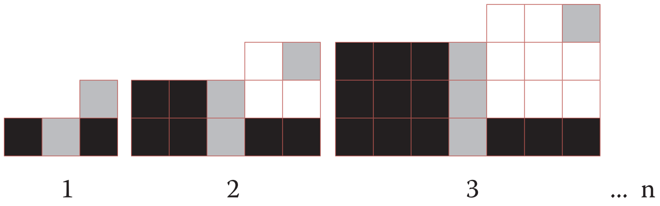
Bruno

Figura 3. Respostas de Marco e Bruno a uma tarefa de comparação de frações (6.º ano)

Um outro aluno, Bruno, responde também apresentando um contraexemplo. Mas a escolha de frações é surpreendente, pois são todas equivalentes à unidade ($\frac{5}{5},\frac{3}{3},\frac{7}{7},\frac{4}{4}$). Trata-se de uma resposta extremamente interessante, não só pelo seu carácter inesperado, mas também porque a sua verificação é muito simples, dada a natureza dos cálculos envolvidos. Ambos os exemplos mostram a relação estreita entre representações e raciocínio. Mostram, também, o à-vontade dos alunos relativamente ao significado dos conceitos envolvidos.

RACIOCÍNIO NUMA TAREFA COM UMA SEQUÊNCIA COM QUADRADOS

Vejamos um exemplo de uma questão que apela à realização de raciocínio dedutivo (figura 4) e para a qual os alunos elaboraram as suas respostas durante o trabalho autónomo.



Mostra que, para cada termo, a diferença entre o número de quadrados pretos e o número de quadrados brancos é igual ao número de quadrados cinzentos.

Figura 4. Tarefa com uma sequência com quadrados.

Na parte de cima da sua resposta (figura 5), Pedro aponta os quadrados pretos da figura (que são 6), mas não se percebe porque determina metade (*justificação incorreta*). Aparentemente, o aluno procura estabelecer relações. Depois, à esquerda, indica os três termos gerais, mas não determina a diferença entre os termos gerais que interessam. Finalmente, à direita, mostra que a afirmação é verdadeira, apresentando apenas um exemplo (*justifica com um caso*).

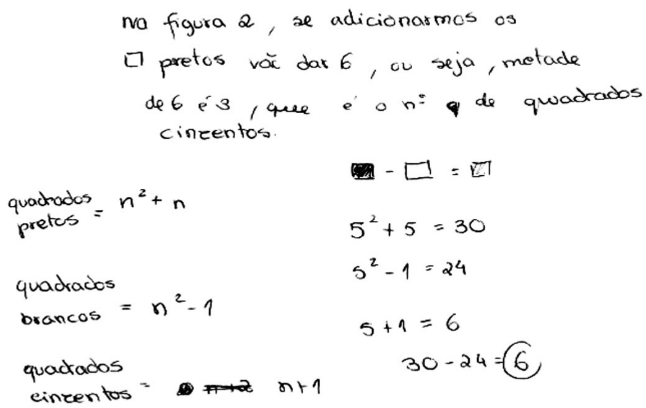


Figura 5. Resposta de Pedro (8.º ano) à tarefa.

Na mesma tarefa, Ana procura fazer uma *generalização*. Para isso, começa por determinar as diferenças em cada uma das três figuras (ensaia um passo do raciocínio indutivo) (figura 6). A partir daqui não consegue avançar. Depois, determina os termos gerais (em baixo à esquerda) (raciocínio indutivo). Finalmente, faz uma verificação algébrica da igualdade pedida (em baixo à direita), o que constitui uma *justificação* (raciocínio dedutivo).

Em ambos os casos, os alunos usam nas suas respostas elementos de uma variedade de representações: linguagem algébrica, linguagem natural e representações icónicas.

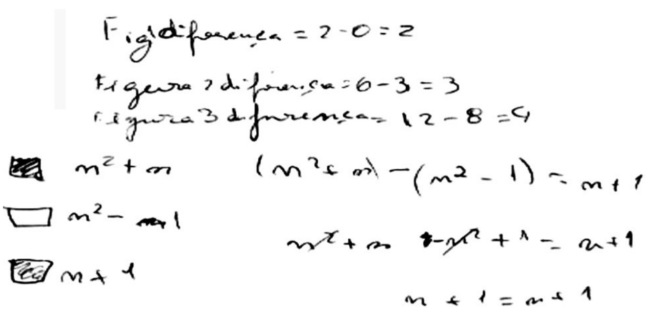


Figura 6. Resposta de Ana (8.º ano) à tarefa.

RACIOCÍNIO NUMA DISCUSSÃO COLETIVA

Os momentos de discussão coletiva de uma aula em três fases são também importantes para levar os alunos a explicar os seus raciocínios ou mesmo para formular novos raciocínios. Vejamos uma tarefa que envolve três equações, relativas a uma situação imaginária em que três alunos, Catarina, Ricardo e Inês, registam o crescimento das suas plantas (esta situação e todos os diálogos que surgem adiante são retirados de Mata-Pereira & Ponte, 2017). A altura de cada planta é dada, em cada momento, pelas funções:

$c(x) = 0{,}6x+2$

$r(x) = 2 + (3/5)x$

$i(x) = 1+0{,}6x$

Na discussão coletiva, a professora começa por pedir uma *justificação* (J), que é efetivamente dada pelo aluno. Mais adiante, incentiva um aluno (Vasco), a apresentar uma *conjetura* que tinha feito (C). Na última intervenção, o aluno começa por fazer uma *justificação*, rematando com uma *generalização*. Usa uma linguagem incorreta para se exprimir, mas a professora valoriza a ideia do aluno que, subtilmente, rediz (R) numa linguagem matemática apropriada.

Professora: Porque é que têm de ser duas retas paralelas? (J?)

Vasco: Porque a da Catarina e do Ricardo começaram com dois centímetros de altura e vão sempre acrescentar e depois a da Inês começou com um centímetro de altura e a somar.

Professora: E só há... Há outra hipótese das retas não se intersetarem sem serem paralelas?

Vários alunos: Não.

Professora: Não, então, graficamente, nós temos isto.

…

Professora: E ainda quero que o Vasco partilhe connosco aqui uma coisa que observou muito interessante. (C).

Vasco: Como a Catarina e o Ricardo começaram com a mesma altura e como ambas as plantas crescem ao mesmo ritmo, não se vão cruzar, a da Inês como cresce todos os dias…

Professora: Não se vão cruzar, estas aqui?!

Vasco: Sim. Então, já estão cruzadas.

Professora: Ah, já estão sobrepostas, coincidentes. E estas duas?

Vasco: A da Inês, como todos os dias cresce a mesma altura das restantes e começou com menos um centímetro… Vai ficar sempre mais pequena.

Professora: Vai ficar sempre mais pequena, daí que nunca se intersete [com os outros]. Exatamente, exatamente. (R)

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO: CONJETURAR, GENERALIZAR E JUSTIFICAR

Há uma variedade de aspetos e processos que podem estar envolvidos no raciocínio matemático. São vários os autores que desenvolveram modelos que pretendem destacar o que envolve raciocinar matematicamente. Por exemplo, para

Lannin, Ellis e Elliot (2011) "raciocinar matematicamente é um processo dinâmico envolvendo conjeturar, generalizar, investigar porquê, e desenvolver e avaliar argumentos" (p. 12). Um outro modelo do raciocínio matemático, de Mata-Pereira e Ponte (2012), enquadra o raciocínio com dois outros processos, representar e dar significado (figura 7), evidenciando que o raciocínio matemático apoia-se necessariamente em representações e requer atribuição de significados aos objetos e ações envolvidos. Este modelo tem por base o processo de realização de uma investigação ou resolução de um problema matemático, começando pela formulação de questões, passando para a formulação de conjeturas e estratégias de resolução (que podem envolver generalização), aplicando essas estratégias e testando as conjeturas, até ao processo de validação (através da justificação).

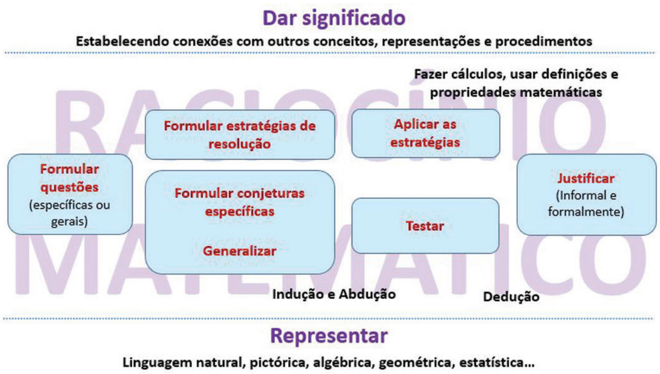


Figura 7. Modelo do raciocínio matemático adaptado de Mata-Pereira e Ponte (2012).

Conjeturar, *generalizar* e *justificar* destacam-se como processos essenciais do raciocínio matemático. Conjeturar, como vimos, é central no raciocínio abdutivo. Generalizar, ou seja, formular conjeturas de natureza geral, é um processo-chave dos raciocínios indutivo e abdutivo. Justificar, pelo seu lado, é um processo essencial do raciocínio dedutivo. Alguns elementos em que estes processos se podem basear e formas que podem assumir estão indicados na tabela 1.

É de sublinhar que o trabalho em torno do raciocínio matemático não é exclusivo dos anos de escolaridade mais avançados – pode e deve começar nos primeiros anos. Ou seja, conjeturar, generalizar e justificar são processos que podem ser valorizados desde o início da escolaridade.

ABORDAGEM EXPLORATÓRIA

A aula em três fases permite pôr em prática a abordagem de ensino exploratório (Ponte, 2005). Nesta abordagem, os alunos trabalham em tarefas para as quais não têm um método de resolução imediato – para as resolver têm de construir as suas próprias estratégias, usando conhecimentos prévios. Deste modo, os alunos assumem um papel ativo na interpretação das questões, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução. São chamados a apresentar e justificar os seus raciocínios. Os alunos têm assim oportunidade para construir ou aprofundar a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas.

Tabela 1. Conjeturar, Generalizar e Justificar

Conjeturar	*Podem ter por base* - observação; - construção; - transformação do conhecimento prévio; - combinações de observação, construção e transformação.	*Pode assumir formas como* - identificar uma possível solução para um problema; - formular uma estratégia para resolver um problema;
Generalizar		*Pode assumir formas como* - reconhecer um padrão ou uma propriedade comum a um conjunto de objetos; - alargar o domínio de validade de uma propriedade a um conjunto mais alargado de objetos.
Justificar	*Pode ter por base* - definições; - axiomas, propriedades, princípios gerais; - representações; - combinações de definições, propriedades e representações.	*Pode assumir formas como* - coerência lógica; - uso de exemplos genéricos; - uso contraexemplos; - por exaustão; - por absurdo.

Nesta abordagem, o professor, em lugar de ensinar diretamente conceitos, procedimentos e algoritmos, mostrando exemplos e propondo exercícios para praticar, propõe aos alunos um trabalho de exploração e descoberta, e promove momentos de negociação de significados, argumentação e discussão coletiva.

A abordagem exploratória tem dois suportes principais. Um deles é a escolha de tarefas apropriadas, suscetíveis de promover a construção de conceitos, a formulação de conjeturas, generalizações e justificações. O outro é o estabelecimento de um ambiente de comunicação na sala de aula capaz de favorecer a participação e reflexão por parte dos alunos, com relevo para os momentos de discussão coletiva. A tabela 2 apresenta algumas das caraterísticas das tarefas e das ações do professor que favorecem o desenvolvimento do raciocínio dos seus alunos, conduzindo a comunicação na sala de aula.

A abordagem exploratória permite enfatizar a construção de conceitos, a modelação de situações e também a utilização de definições e propriedades de objetos matemáticos para os alunos realizarem raciocínios – nomeadamente para conjeturar, generalizar e justificar. Deste modo, presta atenção aos aspetos computacionais da Matemática, mas valoriza também os aspetos concetuais – ou seja, considera importante obter resultados, mas mais importante ainda compreender a estratégia que foi usada e a sua justificação.

CONCLUSÃO

Ao longo deste artigo procurámos salientar diversas ideias fundamentais:

Tabela 2. Tarefas e ações do professor para promover o raciocínio

Caraterísticas das tarefas a selecionar	Ações do professor durante a realização da tarefa		
	No lançamento da tarefa	Durante o trabalho autónomo	Na discussão coletiva
• Ter natureza diversa e com diferentes graus de desafio, incluindo questões de exploração e/ou problemas; • Permitir uma variedade de estratégias de resolução; • Suscitar a formulação de conjeturas e generalizações; • Solicitar a justificação de respostas ou estratégias de resolução.	• Assegurar que todos os alunos compreendem os termos matemáticos do enunciado; • Assegurar que todos os alunos compreendem o contexto; • Desenvolver uma linguagem comum para descrever os aspetos essenciais da tarefa; • Destacar processos de raciocínio que podem estar envolvidos na tarefa, como conjeturar, generalizar e justificar; • Promover o envolvimento dos alunos na realização da tarefa sem diminuir o seu grau de desafio.	• Acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações necessárias, sem reduzir de modo significativo o seu grau de desafio; • Para os alunos com dificuldades em formular ou concretizar uma estratégia de resolução, dar sugestões ou colocar questões facilitadoras que os ajudem a chegar por si próprios a uma estratégia; • Para os alunos que rapidamente resolvem a tarefa, propor extensões, envolvendo a exploração de novas questões, possíveis conjeturas e generalizações ou a formulação de justificações alternativas.	• Encorajar a partilha de ideias; • Explorar desacordos entre alunos, levando-os a argumentar as suas posições; • Aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique; • Solicitar a explicação do "porquê", a apresentação de justificações de respostas ou estratégias de resolução e a formulação de justificações alternativas; • Solicitar aos alunos que identifiquem justificações válidas e inválidas, destacando o que as valida; • Promover a reflexão sobre os processos de raciocínio utilizados; • Propor demonstrações sempre que pertinentes e adequadas aos conhecimentos dos alunos; • Desafiar os alunos a formular novas questões e estabelecer novas conjeturas e generalizações.

- O raciocínio é uma capacidade transversal que, embora não exclusiva da Matemática, pode e deve ser promovida no trabalho em Matemática.
- Vertentes fundamentais do raciocínio em Matemática são as conjeturas (obtidas por raciocínio abdutivo), as generalizações (obtidas na sua maioria de forma indutiva e abdutiva) e as justificações (alicerce do raciocínio dedutivo).
- A abordagem de ensino exploratório, baseada numa seleção criteriosa de tarefas e num ambiente estimulante de comunicação, com destaque para as discussões coletivas, proporciona um ensino da Matemática com compreensão e é uma base importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

A aula exploratória permite aos alunos grande protagonismo na realização das tarefas e na expressão dos seus raciocínios. A valorização do raciocínio matemático na sala de aula pode ser feita naturalmente a partir do trabalho dos alunos. Muitos professores trabalham já hoje com os seus alunos a partir de tarefas e não a partir de explicações e exemplos. Trata-se de um modo de trabalho que pode levar os alunos não só a desenvolver o seu raciocínio e os seus conhecimentos e capacidades em Matemática mas também a assumir uma perspetiva muito mais positiva sobre o que é esta ciência como atividade humana.

Nota: Este artigo foi elaborado no âmbito do Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores e tem em conta o quadro teórico do projeto. O Projeto REASON tem apoio da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia, contrato IC&DT – AAC02/SAICT/2017 e PTDC/CED-EDG/28022/2017.

Referências

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège. Modélisation et simulation (*Tese de doutoramento, Institut National Polytechnique de Grenoble; Université Joseph-Fourier - Grenoble I).

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática.* Lisboa: Gradiva.

Galbraith, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher, 88*(5), 412-417.

Hanna, G. (2002). Proof and its classroom role: A survey. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos (Eds.), *Ensino e aprendizagem da geometria* (pp. 75-104). Lisboa: SPCE.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8.* Reston, VA: NCTM.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante, 21*(2), 81-110.

Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: Uma discussão epistemológica* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática, 100*, 3-9.

Peirce, C. S. (1931–1958) *Collected papers* (8 vols). In C. Hartshorne, P. Weiss & A. Burks (Eds.), Cambridge, MA: Harvard University Press.

Pólya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning* (ed. orig. 1954, Vol. 1). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática, 100*, 89-96.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns: Findings, insights, and issues drawn from a three-year study on patterns are intended to help teach prealgebra and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15(*4), 213-221.

Silva, A. P. (2009). A problemática da descoberta e da prova*. Educação e Matemática, 101,* 37-41.

João Pedro da Ponte
Marisa Quaresma
Joana Mata Pereira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa