

Uma viagem pelo mundo dos números – Relato de uma experiência na Formação Inicial de Professores

PAULO AFONSO

Evidenciar a Matemática como sendo uma ciência em que alguns conceitos se podem conectar com a vida real, com outras áreas do currículo ou com outros conceitos da própria Matemática é um dos desígnios do atual programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), bem como do programa anterior (ME, 2007) e também é defendido por alguns educadores matemáticos, como sejam, a título de exemplo, Ortega (2005), Afonso (2008), Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) ou Afonso (2009). A sua ênfase atravessa vários níveis de escolaridade, que vão desde o Pré-Escolar e do 1.º Ciclo do Ensino Básico (Melo, 2013), passando pelo 2.º Ciclo do Ensino Básico (Ventura, 2014), pelo 3.º Ciclo do Ensino Básico (Ferreira, 2012) até ao Ensino Secundário (Silva, 2010). No Ensino Superior, a experiência tem-nos permitido constatar o agrado de futuros professores de Matemática, quando confrontados com tarefas de investigação que lhes permitam “viajar” em torno de múltiplos conceitos matemáticos que se conectam uns aos outros de forma surpreendente.

Foi com base no pressuposto de que os futuros professores de Matemática devem ser envolvidos em atividades de investigação, evidenciando a Matemática como Ciência das Conexões, que desafiámos uma turma finalista de um Curso de Licenciatura em Educação Básica a investigar o número 222, na vertente em que os conceitos matemáticos se podem conectar a outros conceitos da própria Matemática (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008). A metodologia de abordagem proposta foi que os 20 estudantes trabalhassem em pares e assim que surgisse alguma “boa” ideia a partilhassem oralmente com os colegas e, ainda, dessem resposta a questões ou desafios que o docente lhes fosse colocando.

Desde logo, houve alguém que associou o 222 à terça parte do Número do Diabo – 666. Tendo em conta esta intervenção, o docente solicitou aos estudantes o uso de telemóveis para pesquisarem na Internet o que aí poderiam encontrar relacionado com o Número do Diabo. De um dos *sites* foi lida a seguinte passagem:

A explicação mais conhecida está no Apocalipse, o último livro da Bíblia, [...] Encontra-se no capítulo 13, versículo 18 a seguinte passagem: “Aqui há sabedoria. Aquele que

tem entendimento, calcule o número da besta; porque é o número de um homem, e o seu número é seiscentos e sessenta e seis” (<https://super.abril.com.br/blog/oraculo/por-que-666-e-o-numero-do-diabo/>).

De seguida, uma estudante sugeriu averiguar quais os números inteiros que eram possíveis obter-se utilizando-se os três dígitos que compunham o número 222. Face a esta sugestão, outra estudante perguntou se era permitido o uso de parêntesis, de potências e da raiz quadrada, tendo recebido, por parte do docente, um sim como resposta. Por cada intervenção, o docente escreveu no quadro da sala de aula os números inteiros obtidos. Eis as sugestões avançadas pelos estudantes:

$$\begin{aligned} &0 - \sqrt{2+2} - 2; \quad 1 - \frac{\sqrt{2+2}}{2} \text{ ou } \frac{\sqrt{2^2}}{2}; \quad 2 - \frac{2^2}{2} \text{ ou } 2+2-2 \text{ ou } 2^2-2; \\ &3 - \frac{2}{2}+2; \quad 4 - \sqrt{(2 \times 2)^2}; \quad 6 - 2+2+2; \quad 8 - 2 \times 2 \times 2; \quad 11 - \frac{22}{2}; \\ &16 - (2+2)^2 \text{ ou } (2^2)^2 \text{ ou } 2^{2^2}; \quad 20 - 22-2; \quad 484 - 22^2; \quad 4194304 - 2^{22} \end{aligned}$$

Após a identificação destes doze números inteiros, o docente perguntou se já tinham conseguido obter o maior número inteiro que seria possível obter face à tarefa proposta. Todos responderam afirmativamente e o docente aproveitou para lhes recordar o conceito de fatorial de um número. Logo de seguida, um estudante sugeriu o fatorial de $2+2+2$, ou seja $6!$, cujo valor é 720. De imediato, outra estudante referiu que tinha usado a calculadora para calcular o fatorial de 222, mas era um número tão elevado que os dígitos não cabiam no mostrador da máquina. Tendo em conta este comentário, o docente ligou o projetor de vídeo da sala de aula e pesquisou na Internet algum *site* onde se pudessem observar todos os dígitos do 222! No *site* com o endereço <https://pt.numberempire.com/factorialcalculator.php> constataram a grandeza do número obtido. Assim sendo, vários estudantes concluíram que estava descoberto o maior número possível, utilizando-se os três dígitos que compunham o número 222. Perante esta observação, outra estudante contrariou-os, sugerindo, em sua substituição, o 2^{22} , ou seja 4194304! Após a restante turma ter concordado com esta última observação, ainda foram sugeridos os seguintes números, sendo que os maiores foram confirmados no *site* suprarreferido:

$$12 - \frac{(2+2)!}{2}; 22 - (2+2)! - 2; 26 - (2+2)! + 2; 48 - (2+2)! \times 2;$$

$$576 - [(2+2)!]^2; 40320 - (2 \times 2 \times 2)!; 562000363888803840000 - \frac{22!}{2};$$

$$112400072777607679998 - 22! - 2; 112400072777607680002 - 22! + 2;$$

$$224800145555215360000 - 22! \times 2$$

Terminada esta exploração, houve um grupo que sugeriu fatorizar-se o número 222 para se identificarem os seus divisores. O registo efetuado no quadro da sala de aula foi a seguinte: $222 = 2 \times 3 \times 37$, acrescentando-se o respetivo conjunto dos divisores do 222:

$$D_{222} = \{1, 2, 3, 6, 37, 74, 111, 222\}.$$

Um dos estudantes referiu de seguida que: “*Um dos fatores da fatorização é o 3, pelo que o número é divisível por 3*”. Outra estudante referiu que isso era verdade, justificando que a soma dos três dígitos do número 222 era um múltiplo de 3.

Aproveitando estas duas últimas intervenções, o docente recordou o conceito de quadrado mágico de ordem três e solicitou que encontrassem os nove números inteiros consecutivos que permitissem a construção de uma figura mágica deste tipo, com a soma mágica 222. Os estudantes recordaram as relações algébricas que existem numa figura deste tipo, se se conhecer a soma mágica (S), pelo que os nove números inteiros consecutivos utilizados foram os seguintes:

$$\{71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78\}$$

			71	78	73
			76	74	72
			75	70	77

De facto, os estudantes confirmaram que a soma dos números envolvidos em cada linha, em cada coluna e em ambas as diagonais era sempre 222.

A estudante que inicialmente se tinha referido ao Número do Diabo voltou a referir-se a ele, dizendo que a soma das três “somadas horizontais” ou das três “somadas verticais” era sempre 666. Assim, concluiu que a soma destes nove números consecutivos coincidia com o Número do Diabo: $70 + 71 + 72 + 73 + 74 + 75 + 76 + 77 + 78 = 666$.

Passados alguns momentos de silêncio, uma estudante referiu que com estes nove números consecutivos também se poderia salientar que o valor da média aritmética entre eles era a terça parte do 222, isto é, o 74, que era o valor central do quadrado mágico acabado de construir. Essa estudante escreveu no quadro

da sala de aula os cálculos que lhe permitiram chegar a essa conclusão:

$$X = \frac{70+71+72+73+74+75+76+77+78}{9} = 74$$

Uma vez mais, a estudante que havia referido ao Número do Diabo acrescentou que esse valor 74 era também a nona parte do Número do Diabo, porque $666 : 74 = 9$.

O docente elogiou bastante o trabalho que estava a ser produzido e lembrou que qualquer número natural era uma potência de base dois ou uma soma de potências de base dois. Assim, desafiou a turma a verificar se o 222 era ou não uma potência de base dois e, no caso de não ser, a encontrar o conjunto de potências de base dois cuja soma fosse 222. Rapidamente vários estudantes referiram que $222 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^6 + 2^7$.

A propósito das potências de base dois, uma estudante referiu que os dígitos do 222 permitiam a seguinte igualdade numérica: $2^2 + 2^2 = 2^3$, porque $4 + 4 = 8$ e acrescentou que a soma de dois números quadrados originava um número cúbico.

Aproveitando esta dica dos números figurados, o docente desafiou-os a analisarem se o 222 era ou não um número figurado, designadamente número quadrado, oblongo ou triangular. Rapidamente a turma concluiu que o 222 não pertencia a nenhuma dessas tipologias de números. Para justificarem tal conclusão, o docente dividiu o quadro da sala de aula em três partes e solicitou a três estudantes que, em simultâneo, efetuassem os cálculos respetivos. Eis os cálculos de cada um deles:

Números quadrados: $U_n = n^2$

$$n^2 = 222 \Leftrightarrow n = \pm \sqrt{222} \Leftrightarrow n = 14,9$$

Números oblongos: $U_n = n^2 + n$

$$n^2 + n = 222 \Leftrightarrow n^2 + n - 222 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-222)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 14,41$$

Números triangulares: $U_n = \frac{n^2 + n}{2}$

$$\frac{n^2 + n}{2} = 222 \Leftrightarrow n^2 + n = 444 \Leftrightarrow n^2 + n - 444 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-444)}}{2} \Leftrightarrow n = 20,6$$

Assim sendo, o docente dividiu a turma em três grandes grupos e desafiou cada um deles a investigar se o 222 era a soma de alguns números quadrados ou a soma de alguns números oblongos ou a soma de alguns números triangulares. O grupo que tinha a tarefa de investigar os números quadrados apresentou no quadro da sala de aula as suas quinze soluções, após terem escrito todos os números quadrados inferiores ao 222:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196$$

$222 = 196 + 25 + 1$	$222 = 196 + 16 + 9 + 1$
$222 = 169 + 49 + 4$	$222 = 169 + 36 + 16 + 1$
$222 = 144 + 64 + 9 + 4 + 1$	$222 = 144 + 49 + 25 + 4$
$222 = 144 + 49 + 16 + 9 + 4$	$222 = 144 + 36 + 25 + 16 + 1$
$222 = 121 + 100 + 1$	$222 = 121 + 81 + 16 + 4$
$222 = 121 + 64 + 36 + 1$	$222 = 121 + 49 + 36 + 16$
$222 = 100 + 81 + 36 + 4 + 1$	$222 = 81 + 25 + 16$
$222 = 100 + 64 + 49 + 9$	

Por sua vez, o grupo que investigou os números oblongos apresentou no quadro da sala de aula as suas doze soluções, após ter registado todos os números oblongos inferiores a 222:

2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156, 182, 210

$222 = 210 + 12$	$222 = 132 + 90$
$222 = 132 + 72 + 12 + 6$	$222 = 132 + 56 + 20 + 12 + 2$
$222 = 132 + 42 + 30 + 12 + 6$	$222 = 110 + 90 + 20 + 2$
$222 = 110 + 72 + 20 + 12 + 6 + 2$	$222 = 110 + 56 + 42 + 12 + 2$
$222 = 110 + 56 + 30 + 20 + 6$	$222 = 110 + 42 + 30 + 20 + 12 + 6 + 2$
$222 = 90 + 72 + 42 + 12 + 6$	$222 = 90 + 56 + 42 + 20 + 12 + 2$

No que diz respeito aos números triangulares, eis as trinta e três soluções apresentadas pelos respetivos estudantes, após terem escrito no quadro da sala de aula todos os números triangulares inferiores a 222:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210

$222 = 190 + 28 + 3 + 1$	$222 = 190 + 21 + 10 + 1$
$222 = 190 + 15 + 10 + 6 + 1$	$222 = 171 + 45 + 6$
$222 = 171 + 36 + 15$	$222 = 153 + 66 + 3$
$222 = 153 + 55 + 10 + 3 + 1$	$222 = 153 + 45 + 21 + 3$
$222 = 153 + 45 + 15 + 6 + 3$	$222 = 153 + 28 + 21 + 10 + 6 + 3 + 1$
$222 = 136 + 66 + 10 + 6 + 3 + 1$	$222 = 156 + 55 + 28 + 3$
$222 = 156 + 55 + 21 + 10$	$222 = 136 + 55 + 15 + 10 + 6$
$222 = 136 + 45 + 28 + 10 + 3$	$222 = 136 + 45 + 21 + 10 + 6 + 3 + 1$
$222 = 136 + 36 + 28 + 21 + 1$	$222 = 136 + 36 + 28 + 15 + 6 + 1$
$222 = 136 + 36 + 21 + 15 + 10 + 3 + 1$	$222 = 120 + 91 + 10 + 1$
$222 = 120 + 78 + 21 + 3$	$222 = 120 + 78 + 15 + 6 + 3$
$222 = 120 + 66 + 36$	$222 = 66 + 21 + 15$
$222 = 120 + 55 + 36 + 21$	$222 = 120 + 55 + 28 + 10 + 6 + 3$
$222 = 120 + 55 + 21 + 15 + 10 + 1$	$222 = 105 + 91 + 15 + 10 + 1$
$222 = 105 + 78 + 36 + 3$	$222 = 105 + 66 + 45 + 6$
$222 = 105 + 55 + 45 + 10 + 6 + 1$	$222 = 105 + 45 + 36 + 21 + 15$
$222 = 91 + 78 + 36 + 10 + 6 + 1$	

O docente voltou a elogiar bastante o trabalho desenvolvido por cada grupo e desafiou-os a encontrar em casa os restantes casos que lhes faltou descobrir.

Ao terminar a aula, o docente pediu a um estudante para dizer oralmente um número inteiro positivo, formado por três dígitos diferentes. Obteve como resposta o número 356. De seguida

pediu à turma todos os números que eram possíveis obter-se com a alteração posicional de cada um dos seus três dígitos. Como resposta foram registados no quadro os seguintes números:

356, 365, 536, 563, 653, 635

O docente lembrou-lhes o conceito de permutação, referindo que os três dígitos permitiam, de facto, seis permutações, associando-as ao fatorial do número 3, isto é: $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ (registo que efetuou no quadro da sala de aula).

De seguida, pediu a todos os estudantes para encontrarem a soma destes seis números, tendo obtido como resposta o número 3108. Na continuação, solicitou à turma que adicionasse os três dígitos do número referido inicialmente, tendo obtido, como resposta, o valor 14. Por fim, pediu que encontrassem o quociente entre o 3108 e o 14. Gerou-se um ruído, revelador de uma enorme surpresa, pois o quociente obtido voltou a ser o número 222. Curiosos, os estudantes desejaram perceber o porquê de isto ter acontecido, o que fez com que o docente explicasse no quadro da sala de aula a teoria dos números que fundamentava esta relação aritmética. Assim, tendo em conta o número 356 atribuiu ao dígito 3 a letra “a”, ao dígito 5 a letra “b” e ao dígito 6 a letra “c” e fez a decomposição deste número por ordens, isto é:

$$356 = 300 + 50 + 6 = 100 \times 3 + 10 \times 5 + 1 \times 6 = 100a + 10b + c$$

Procedeu de igual forma para os restantes cinco números:

$$365 = 100a + 10c + b$$

$$536 = 100b + 10a + c$$

$$563 = 100b + 10c + a$$

$$653 = 100c + 10b + a$$

$$635 = 100c + 10a + b$$

Logo, acrescentou que $356 + 365 + 536 + 563 + 653 + 635 = (100a + 10b + c) + (100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10b + a) + (100c + 10a + b) = (100a + 100a + 10a + a + a + 10a) + (10b + b + 100b + 100b + 10b + b) + (c + 10c + c + 10c + 100c + 100c) = 222a + 222b + 222c = 222(a + b + c)$.

Perante esta explanação, terminou a aula com o seguinte registo no quadro:

$$\frac{222(a + b + c)}{(a + b + c)} = 222$$

Alguns estudantes entrevistaram com expressões do tipo: “*Espetáculo!*”, “*Fantástico!*”, “*E tudo à volta do 222, quem diria?*”

Em jeito de síntese, poder-se-á concluir que esta aula permitiu evidenciar a elevada componente motivacional que esta visão da Matemática, em que vários conceitos se conectam com outros, suscita aos estudantes da formação inicial de professores. Contactaram com os conceitos de: (a) parte de, (b) numeral, (c) fatorial do número, (d) múltiplos de um número e critérios de divisibilidade, (e) quadrados mágicos de ordem 3, (f) média

aritmética de um conjunto de dados, (g) potências de base 2, (h) números figurados (quadrados, oblongos, triangulares e cúbicos), (i) permutações e (j) álgebra. Por outro lado, permitiu exemplificar um conceito formativo de largo espectro, em que a Matemática não surge como algo acabado, antes permite que os estudantes assumam o papel de investigadores matemáticos, de modo a que sejam eles próprios a estabelecer conexões entre os conceitos matemáticos explorados. Em última análise, permitiu contactarem com um contexto de aprendizagem em que é possível existir sempre um fio condutor ou elemento integrador entre os vários conceitos abordados que, neste caso, foi o número 222.

Referências

- Afonso, P. (2009). Múltiplas conexões matemáticas envolvendo o 120. *Educação e Matemática*, 183, 28-31.
- Afonso, P. (2008). *O Mundo Mágico das Conexões Matemáticas*. Castelo Branco: Instituto Politécnico de Castelo Branco.
- Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., e Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Direção Geral de Inovação e de

- Desenvolvimento Curricular do Ministério da Educação.
- Ferreira, C. (2012). *Conexões Matemáticas em Álgebra. Um estudo com alunos do 7.º ano de escolaridade*. Lisboa: Mestrado em Educação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- Melo, T. (2013). *Conexões Matemáticas: potencialidades e contributos na Educação Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Ponta Delgada: Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico da Universidade dos Açores.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular do Ministério da Educação.
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Ortega, T. (2005). *Conexiones matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática*. Barcelona: GRAÓ.
- Silva, J. (2010). Conexões Matemáticas no Ensino Secundário. *Educação e Matemática*, 110, 7-12.
- Ventura, H. (2014). *A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: uma experiência de ensino no 2º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Tese de Doutoramento da Universidade de Lisboa.

PAULO AFONSO

CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM PATRIMÓNIO, EDUCAÇÃO E CULTURA (CIPEC),
INSTITUTO POLITÉCNICO DE CASTELO BRANCO

PUBLICAÇÕES APM

Publicações do Grupo de Trabalho de Investigação da APM, disponíveis na Loja da APM ou na Loja online www.apm.pt

